

نص
فلسفية

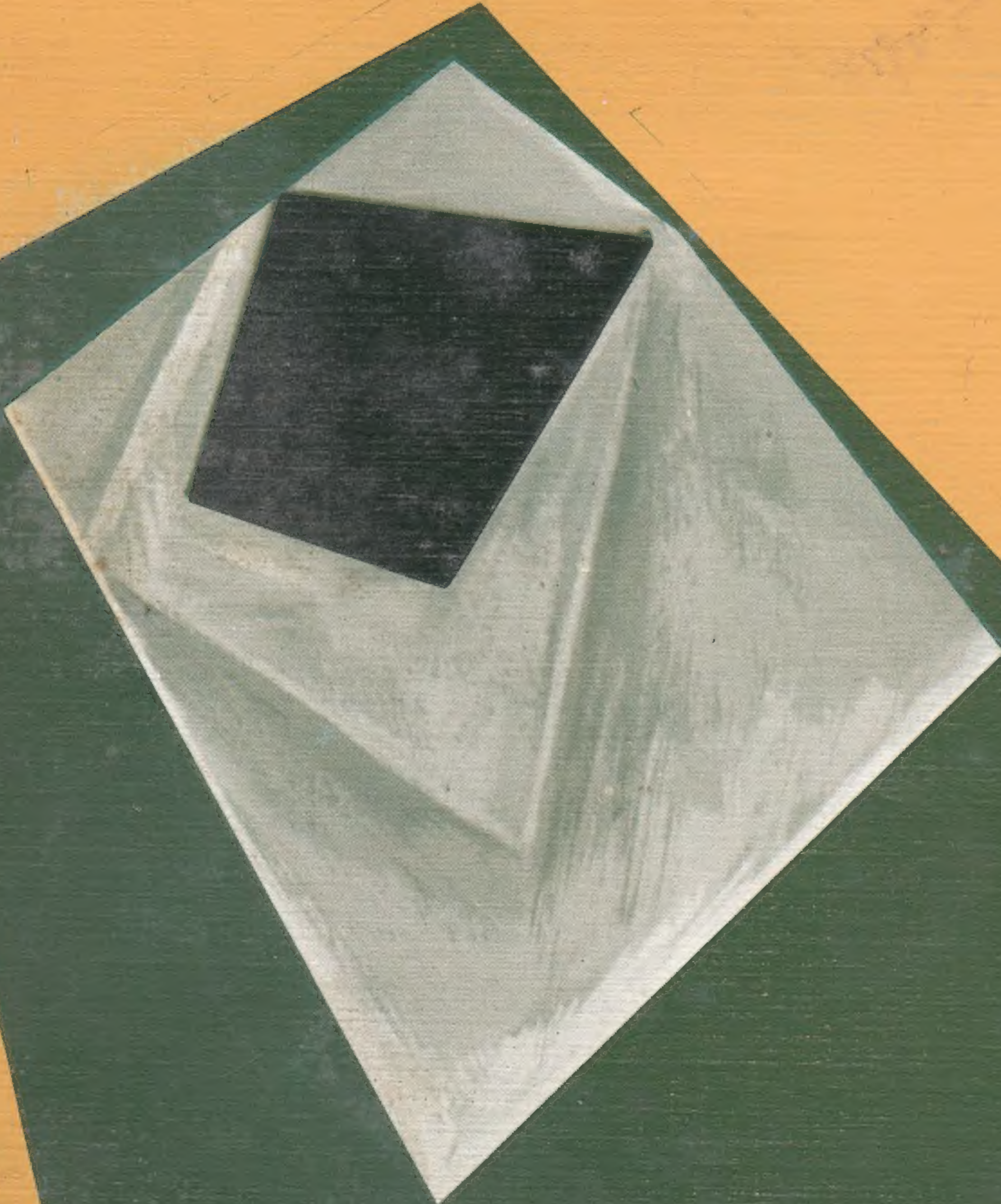
مقدمة في المنطق الرمزي

تأليف

أ. ه. بليسوت د. ج. أوكونر

ترجمة

الدكتور عبد الفتاح الديدي





مَقْدَمٌ فِي الْمَنْطِقِ الرَّقْمِيِّ

مقدّمة في المنطق الرّغزى

تأليف

أ. هـ. بليسوت د. ج. أوكونر

ترجمة

الدكتور عبد الفتاح الديدى



الهيئة المصرية العامة للكتاب

١٩٨٧

مقدمة

يرجع اهتمامي بترجمة هذا الكتاب في موضوع المنطق الرمزي إلى ثلاثة أمور :
أولها أنني أجد شغفاً كبيراً بالأبحاث المستحدثة في اللغة العربية وبالدراسات التي لا تزال إلى حد كبير مجهولة وشبه معدومة في مجالاتنا العلمية .
وثانيها أن المنطق الرمزي لم يعد الآن مقصوراً على اهتمام المشتغلين بالفلسفة وإنما صار موضوعاً من الموضوعات التي تشغل الباحثين والدارسين كافة في كل المجالات . ففضلاً عن وضع المنطق الرمزي كتكوين أساسي ضروري بالنسبة إلى عقلية الفيلسوف المعاصر في هذا العالم المتشابك المعقد الذي نعيش فيه ، أصبح هذا العلم شاغلاً أكبر لدى المهتمين بالتكنولوجيا الحديثة وعلوم الاستراتيجية العسكرية وبالدراسات الرياضية والهندسية وبالمشاغل العقلية ذات الطابع الجبري، بعامه .
فيستطيع كل باحث أن يستخدم هذا المنطق الرمزي الجديد على طريقته من أجل تحقيق أهدافه الخاصة في العلم الذي يشتغل به . ذلك أن هذا العلم هو أسلوب التفكير الحديث السريع المباشر الذي يسعى للعثور على حلول عملية دقيقة منهجية في كل الإشكالات التي تعترضه . وهو يدل - فضلاً عن ذلك - على أن أسلوب التفكير بأكمله قد طرأ عليه تغير أساسي في جوهره ابتداء من لحظات ظهور بشائره في أواخر العشرينات في هذا القرن^(١) عندما بدأ اكتشاف أصول المنطق الرمزي ووسائله على أيدي علماء المنطق الخلقص .

(١) أصبح اسم اللوجيستيك باللغة الفرنسية مرادفاً لاسم المنطق الرمزي اعتباراً من سنة ١٩٠٤ بإشارة من المؤتمر الدولي للفلسفة . ولكن استقلال المنطق الرمزي بدأ يتحقق بالفعل في أواخر العشرينات من هذا القرن . انظر قاموس الفلسفة بقلم ريوتر ص ١٨٢ . وأول كتاب في هذا الموضوع نشر سنة ١٩١٨ من تأليف Lewis وتوالت بعده الدراسات بصور أكثر اكتمالاً ونضجاً . وتعني اللوجيستيك - الحساب المنطقي .

وثالث هذه الأمور أننى أحرص أشد الحرص على تحقيق التعاون الثقافى فى أوفق صوره بين مجالات العلم والثقافة فى الغرب ودوائر المعرفة والبحث العقلى بالجمهورية العربية المتحدة . وأعتقد أنه لا ينبغى الاهتمام بأخذ المستويات على حساب غيره من المستويات . فيجب مثلاً ألا ينصرف اهتمامنا إلى الثقافة الجماهيرية ونغفل الثقافة التكنولوجية العصرية كما يجب ألا تجور هذه على تلك . بل علينا أن نحقق النجاح لمختلف المستويات فى آن واحد ، وأن ندفع عجلة التقدم هنا وهناك لإعداد ما يشبه التوافق العام بين روح الأفراد والجماعات ، ولتذليل الصعاب أمام الباحثين ، والانتصار لكل ما يعين على الابتكار والإبداع والتقدم مع الاستمرار فى تزويد القارئ بكل ما يمتعه ثقافياً ، وفى توفير كل أدوات المعرفة والفهم للمشاكل المحيطة به .

ولأنه لجدير بالذكر هنا أن هذا العلم كما هو مسجل فى القواميس ودوائر المعارف الكبيرة علم فلسفى محض ، لأنه من ابتكار الفلاسفة ، وارتداد نحو الصورية الخاصة بالمنطق الأرسطى الذى عرف منذ القرن الرابع قبل الميلاد فى كتابه الأول المشهور عن المنطق : التحليلات الأولى التى تتناول القياس . فقد عمد فلاسفة العصر الحديث إلى ابتكار هذا العلم الخاص بالمنطق الرمزى على أساس استغلال الصورية المنطقية الأرسطية إلى أقصى حد .

ولم يشأ مؤلفا هذا الكتاب ، وهما الأستاذان بيسون وأوكونر ، أن يضعوا مقدمة تفصيلية تفسح المجال لتوضيح كاف بالنسبة إلى العلم الذى يشرحانه . وإنما عمدا مباشرة إلى الدخول فى الموضوع ومعالجة مسائل هذا العلم حتى تكون هى نفسها خير تعريف لها وخير تمهيد لإدراك فصوله وأبوابه وحقيقته وضعه ومهمته . بل لعلهما اختصرا أيضاً فى الفصل الأول الذى يمهّد للموضوع تمهيداً تاريخياً بعض الشيء على أساس تفضيلهما عدم الدخول فى تفصيلات تبليبل ذهن القارئ وتشتت فكره وتقحمه فى مشكلات عويصة بعيدة عن حقيقة العلم الذى يتطلب الدراسة

والفهم . وقد حمدنا لهما هذا المنهج وعرفنا حرصهما على تقديم كتاب علمي يفيد القارئ المحتاج إلى الإلمام بالمنطق الرمزي الجديد ، وقدرنا لهما فوق هذا كله دقة البحث والإحاطة العاجلة السريعة المباشرة بكل جانب على حدة ، مع تفضيل الشرح والتوضيح على نحو مدرسي يسمح للقارئ بمعرفة هذا العلم بمجهوده الشخصي إذا واصل المراجعة والفهم .

والواقع أنني اخترت هذا الكتاب للترجمة بعد جهد كبير في الموازنة بين الكتب المتخصصة في هذا الفرع من علوم التكنولوجيا الحديثة ، فرأيت أنه أحقها بالترجمة وأوفاهم وأسلمها وأكثرها حرصاً على توضيح كل صغيرة وكبيرة حتى يسهل على القارئ دراسة هذا العلم كاملاً ابتداء من هذه السطور^(١) .

على أنني أحب ألا يظن القارئ بحال من الأحوال أنه يعرف هذا العلم من كتب عربية سابقة لأن هذا العلم بوضعه في هذا الكتاب لا يمت بصلة إلى أي مادة مكتوبة أو مطبوعة في اللغة العربية من قبل . فقد يرد في بعض الكتب المؤلفة عن المنطق ذكر بعض عبارات مشابهة لما سوف يرد بهذا الكتاب ، ولكنها لا تمت إليها بصلة . وأسلم تحليل لبعض خصائص هذا العلم هو ما جاء في ثلاث صفحات بمؤخرة كتاب المنطق الصوري والرياضي الذي ألفه الأستاذ الدكتور عبد الرحمن بدوي .

ولكن ما سر هذا العلم الجديد المسمى بالمنطق الرمزي ؟ ولماذا لم تتكلم عنه كتب المنطق العربية ، ولم يحاول أحد أفراد بحث واف عنه .

(١) مما لا شك فيه أن هذا الكتاب يتناول موضوعات رياضية لا تزيد على معارف طالب المرحلة الثانوية . ولكن من المؤكد أن البعض يتصور صعوبتها الشديدة . والواقع أنه لا حيلة لنا فيما لا بد منه ، ولا مفر من المغامرة من أجل إدخال هذا العلم بين مواد الفلسفة والعلوم الأخرى . وإذا كانت هناك صعوبات ناتجة عن التعبير ، فما لا شك فيه أن عدم المحاولة خوفاً من إساءة التعبير هو الخطأ الأكبر .

السرفى ذلك هو أن علم المنطق الرمزي جديد تماماً ويحتاج إلى تدريب خاص من أجل الإلمام به ، بل لا تكفى معرفة المنطق من أجل معرفته وفهم مسأله وجزئياته ، ذلك أن المنطق الرمزي هو الحلقة الثالثة فى سلسلة تطور المنطق المعاصر ابتداء من أوائل هذا القرن حتى منتصفه ، فلم يظهر المنطق الرمزي الجديد بصورته النهائية إلا فى الثلاثينات من هذا القرن ، وإن كان قد بدأ المناطقه يضعون أصوله ويحددون معالمه وخصائصه فى أوائل العشرينات على وجه التحديد عندما ظهرت كتب متكاملة فى الموضوع . ولا بد أن نعرف أن بعض الأنساق المنطقية التى كان قد وضعها بعض علماء الرياضيات من الفلاسفة تشبه فى قليل من أجزائها بعض ملامح المنطق الرمزي الحالى . ولكنها فى الواقع لا تعدو أن تكون إرهابات جزئية جداً وغير مكتملة النضوج بالنسبة إلى المنطق الرمزي الجديد^(١) .

والأولى بنا أن نعرف أن كتاب هوايتيد ورسل عن البرنكيبييا أو أسس الرياضيات قد أثبت بما لا يدع مجالا للشك أن كل الرياضيات تقبل الترجمة إلى لغة المنطق ، أو بعبارة أخرى لا توجد أية عملية رياضية لا تقبل الشرح والتفسير بعمليات منطقية ، ولا توجد أية فكرة فى الرياضيات ترفض التفسير بلغة المنطق . ولهذا أقبل هوايتيد ورسل على تفسير الأفكار الجوهرية فى الأبنية الرياضية مثل نظرية العد والحساب والجبر والتحليل بما يقابلها من الأفكار المنطقية ، وعمداً معاً إلى وضع النظرية الجبرية المجردة فى صيغة منطق العلاقات بين دفتى ذلك الكتاب .

ولا شك أن عوامل أخرى تعاونت مع هذا الاتجاه فى ترجمة الأفكار الرياضية إلى أفكار منطقية ، فقد شارك كل من فتجنشتاين ونيكو Nicod فى تأسيس

(١) انظر مثلاً كلام رسل عن المنطق الرمزي فى كتابه عن أصول الرياضيات المترجم إلى اللغة العربية بقلم الدكتورين أحمد فؤاد الأهوانى ومحمد مرسى أحمد .

حساب البديهيات ابتداء من فكرة واحدة ذات وجهين أولهما الكذب الارتباطي كما هو الحال في التعبير « س ، ص كاذبتان » والآخر التنافر بحيث لا يصدقان معاً ولا يكذبان معاً .

وشارك آخرون أيضاً في هذا الاتجاه من قبل بقصد جعل المنطق ذا بناء من البديهيات وتحويله إلى علم البديهيات . ويعمد هذا العلم إلى اختيار قضايا أولية بمساعدة الصيغ المختلفة ، فيتحم على كل نسق موضوع موضع التفضيل أن يكون متسقاً محكماً قائماً بذاته بحيث يمكن استنباط بديهية جديدة من البديهيات السابقة المعروفة ، ويتحم أيضاً أن يكون كاملاً بحيث يمكن الحصول على كل الصيغ الباقية ذات المعنى داخل النسق المنطقي ابتداء من صيغ أولية بسيطة .

وحرص الكثيرون منذ أواخر القرن الماضي على إضافة حقيقة من الحقائق إلى هذا العلم الجديد، فعرف مثلاً عن برنتانو أنه أدخل فكرتي « الوصل » و « النفي » ، وعرف عن « فريجه » أيضاً أنه أدخل فكرتي « الوصل » . وكان « فريجه » أيضاً أول من أعطى فكرة « المعنى المنطقي » كل قوته التي مهدت لفكرة السلامة المنطقية أو الصحة المنطقية فيما بعد . ثم شارك كل من رسل وهوايتيد وجونسون Johnson أيضاً بالكثير فيما يتعلق بالنفي والفصل . وعاون على استخدام المنطق بصورة الرياضية الجديدة كل من ليويس Lewis ولانجفورد Langford وجودل K.Godel وبيرس Pierce وسميث H. B. Smith وهابيتينج Heyting وعرفت كتب هؤلاء في أفرع المنطق الرياضي الجديد إلى ما قبل الحرب العالمية الثانية .

غير أن الصورية^(١) الكاملة لم تكن قد تحققت كاملة بصورتها النسقية المتأخرة

(١) ينبغي أن يدرك القارئ معنى الصورية هنا بمعناها الصحيح الواضح لكي يتمكن فعلاً من دراسة المنطق الرمزي ؛ إذ يعني هذا المنطق بتجريد القضية من محتواها بحيث لا يمكن تحديد معنى صورة القضية إلا بالرجوع إلى تصورات منطقية بحتة . وعندما يتحدث المناطق عن الصور فهم يقصدون صور القضايا . والتصورات المنطقية البحتة هنا هي الثوابت والمتغيرات على نحو ما سنبين فيما بعد .

إلى ذلك الوقت أى إلى ما قبل الحرب العالمية الثانية . وظن بعض المناطق أن الهدف من المنطق الجديد هو التعميم . وقدم الكثيرون محاولات من أجل تحقيق التعميم على نحو أمثل ، وكان منطق هانز « رايشنباخ » القائم على الاحتمالات ذا عدد لانهاى من القيم (قيم الصدق وقيم الكذب) التى لا تعدو أن تكون تعميماً للمنطق العادى على نحو ما يظهر الفارق بين هندسة إقليدس وهندسة ريمان Riemann أو بين هندسة إقليدس والرياضة البحتة ، ذلك أن التعميم الذى حققه « رايشنباخ » إنما جاء بناء على استبدال فكرة تتابع القضايا أو تسلسلات القضايا أو استلزام القضايا بعضها لبعض بفكرة القضية . وأدى أيضاً إلى تحقيق هذا التعميم استبدال فكرة الاحتمال Probability بفكرة الصدق . وتلعب الأحكام الاحتمالية فى منطق « رايشنباخ » نفس الدور الذى تلعبه أحكام الصدق فى المنطق العادى . وتظهر هذه الأحكام فى منطق لا بوصفها قضايا صادقة وإنما بوصفها بيانات ذات وزن معين أو ذات ثقل معين بحيث تستلزم ما عداها .

ولكن لم تبدأ الصورية فى الظهور بمعناها الجديد إلا عندما اتضح لرجال المنطق أهمية استقلال البديهيات . فقد أعان البحث عن استقلال البديهيات على اكتشاف الدلالات الحقيقية لعملية التجريد فيما صار يطلق عليه اليوم اسم « التجريد الخاص بحساب البديهيات L'abstraction axiomatique » .

ويتألف هذا المنهج من حقيقة بسيطة ، هى أنه إذا توافر لدينا نسق للبديهيات المستقلة نشعر فى رفضها واحدة بعد الأخرى بعرضها على النسق لكيلا نستبقى منها سوى النظريات الأكثر عمومية . أو بعبارة أخرى ندع النسق الخاص بالبديهيات يستصفى من بينها ما يلائمه منها فقط ، ونستمر فى هذه العملية إلى أن يبقى داخل النسق الخاص بالبديهيات أعم النظريات فقط . مثال ذلك تصفية جميع التعريفات الخاصة بالصفربحكم التكوين النسقى للبديهيات من أجل الإبقاء

على أعم نظرية ممكنة كقولنا الصفر عدد يتلوه عدد ولا يسبقه عدد . وعمومية هذا التعريف تجعله جديراً بالدخول في النسق . وتحققت هذه الطريقة عند تأسيس الهندسة العامة ابتداء من ثلاثة مقاييس إقليدية ولا - إقليدية لتكييف هندسة إقليدس عند أوباشفسكى وريمان مع المنطق الحديث ومع ضرورات الرياضيات البحتة . ولكي نزيل الخلاف بين هندسة إقليدس والرياضة البحتة علينا فقط أن نحكم بأن البديهيات يلزم عنها القضايا ، لا أن البديهيات صادقة فالقضايا صادقة تبعاً لذلك . وتمثل تعديل هندسة إقليدس في إعادة النظر في افتراضه الخاص بالزاوية القائمة ، وهو مثل معروف شائع ، وتحققت هذه الطريقة أيضاً عند تأسيس التحليل العام من الجبر العادي المعروف والاكتفاء في الرياضيات التحليلية بمبادئ جبرية أولية . وتم ذلك أيضاً مرة أخرى عند إقامة منطق متعدد الأشكال كمنطق العلاقات ومنطق التضايف والمنطق العضوي ومنطق الجهات ومنطق الحدس وغيره وغيره ابتداء من المنطق الزوجي التقليدي المعروف المادي والصوري^(١) .

وكان أهم حدث ثوري في هذا الصدد هو اكتشاف المنهج الخاص بالبديهيات الذي جاء به رودلف كارناب Carnap بأن أحل منهج وصف العلاقات الارتباطية Beziehungsbeschreibung الذي يصف العالم في حدود وألفاظ العلاقات والأبنية الهيكلية بدلاً من الاعتماد على منهج وصف الخصائص الذاتية Eigenschaftsbeschreibung الذي يصف الأشياء بلغة الجواهر والأعراض .

وقد ظهر بعد كارناب أن منهجه أفاد إفادات محقة بحكم كونه عاماً على نحو مطلق لم يسبق له مثيل ؛ إذ تبين أنه يمكن تطبيقه في أي مجال من مجالات المعرفة . والحق أن كارناب كان قد مهد تمهيداً واضحاً لتأكيد هذه الأوضاع

الجديدة في المنطق حينما عرف الفلسفة بأنها نسق القضايا التي تعتمد على الستاكس أو التركيب اللغوي الذي يمكن أن نصوغه في لغة علمية يطلق عليها اسم القضايا التركيبية الستاكسية السياقية .

وفضلا عما كان في عملية التوحيد بين صيغ المنطق والتكوين اللغوي من صعوبات فإن الصورية التي اكتشفها كارناب لم تكن خالصة نقية ولم تتخلص نهائياً من المواد ، ولم تستخدم بالطريقة المؤدية إلى المنطق الرمزي بصورته الحالية؛ ذلك أن اللغة النموذجية المبسطة بكل ما فيها من الأوصاف الارتباطية على نحو ما وضعها كارناب كانت تهدف أصلاً إلى توضيح حساب الاحتمالات والاستقراء وتعميق جوانب كل منهما .

فهو إذن لا يهدف إلى بلوغ التحليلية الكاملة أو بلوغ مرحلة السلامة المنطقية أو ما نسميه أيضاً بالصحة المنطقية أو بتحصيل الحاصل ، فهذه هي الصورية الجديدة الحقبة التي تمثل الصدق عن طريق المعاني الناشئة عن الشكل المنطقي ذاته (١) .

ولكيلا تقع بلبلة ذهنية بسبب اختلاط أفرع المنطق بعضها ببعض يحسن أن نرجع إلى تقسيم خارجي لمراحل المنطق الرمزي يحدد خطواته تحديداً جامعاً مانعاً إن صح هذا التعبير هنا في هذا المجال . وقد وضع هذا التاريخ المرحلي الموجز في صورة خطوات محددة العلامة « بت E.W. Beth » الأستاذ في جامعة أمستردام والمتخصص في مسألة واحدة من مسائل المنطق هي أسس الرياضيات . يقول الأستاذ « بت » ما يلي في كتابه عن الأسس المنطقية للرياضيات (١٩٥٠ - جوتييه - فيلارباريس - ص ٣٥) :

(١) Quine (Willard van Orman) : From a logical point of view p. 24-p.161.

ينقسم تاريخ المنطق (في العصر الحديث) إلى أربع فترات : الفترة الأولى سادها تفكير « بول » ، وليس لها بالنسبة إلينا سوى أهميتها التاريخية . واقتصرت هذه المرحلة على استيحاء علم الجبر وحده من أجل السيادة الكاملة على الاستدلال المنطقي . أما الفترة الثانية التي اشترك في إعدادها كل من بيرس (منطقياً) وكانثوروديديكيند (رياضياً) فتتميز بالجهود التي بذلها فريجه وإشرودر وبيانو لتطبيق المنطق الجديد في البحث عن أسس الرياضيات . وتمسك فريجه برغبته في استخلاص المضمون المتكامل للرياضيات البحتة من مبادئ المنطق وحدها . أما بيرس وإشرودر وبيانو فكانوا أكثر تواضعاً واكتفوا بتسجيل موجز بقدر الإمكان للاستدلال الرياضي عن طريق الرموز المنطقية . والمرحلة الثالثة هي مرحلة اكتشاف النقائص ونقد الحدسيين بما في ذلك محاولات هيلبرت فيما يتعلق بصورية الرياضيات التقليدية صورية كاملة كشروع في إثبات عدم التعارض فيما بين كل من الصورية والرياضيات . أما الفترة المعاصرة فتبلغ ذروتها عند تأسيس المنهج السيماطيق على يد « تارسكي » من أجل سد الفراغات التي خلقتها الاتجاه « لما بعد الرياضي » أو الميتاماتياتيك لدى هيلبرت . ويعاون تارسكي في هذا أبحاث كل من « إسكوليم » و « جودل » و « تشيرش » .

والمرحلة الجديدة الأخيرة هي التي يمكن أن تسمى بالمنطق الرمزي الجديد . وكل ما عدا ذلك فيما جاء من قبل لا تنطبق عليه هذه التسمية وإنما يصح أن يسمى باسم المنطق الرياضي أو باسم بشائر المنطق الرمزي . أما المنطق الرمزي الحقيقي فهو الذي يبدأ عند أمثال كواين (ويلارد فان أورمان) الذي استطاع أن يتمسك بالتحليلية أو بما يصحح أن نسميه بتحصيل الحاصل على نحو جديد حقاً أدى به إلى إقرار المنطق الرمزي . وفي هذا العلم الجديد تصبح سلامة الخطوات هي المسألة المنطقية التي تشغل البال بغض النظر عن أي هدف آخر . (يعبر عن تحصيل الحاصل Tautological أحياناً بالتكرارية) .

إذن فكل منطق قبل الحرب العالمية يصحح أن يطلق عليه، عادة اسم المنطق الرياضي . أما المنطق الرمزي فهو محاولة جديدة وأخيرة من أجل ترجمة المنطق الرياضي نفسه إلى منطق وحسب . ويستهدف المنطق الجديد السلامة المنطقية أو ما نسميه بالصحة المنطقية أو التحليلية ، فهو بهذا ينفصل عن نظرية المعرفة ونظريات الاستقرار التي تمسكت بها حلقة فيينا وأشباعها .

إذن فالمنطق الرمزي الجديد يتزع نحو ضمان الصحة المنطقية ، وهذه الصحة المنطقية هي مجرد صحة الانتقالات وتسلسل الاستدلالات وسلامة البناء المنطقي من حيث المعنى المركب من التكوين الصوري نفسه ، أو هي ارتباط المعاني وتحقيق وضوح المعنى في بعض الأجزاء بناء على وضوحه في بعض الأجزاء الأخرى . والمقصود بالمعاني هنا تشكيل دلالات خاصة بالتكوينات المنطقية البحتة الخالية من أى مضمون مادي يشير إلى حقائق خارجية .

وهذه خطوة لم تحقق من قبل . وقد ساد منذ أقدم العصور حتى القرن الحاضر منطق الصدق أو الكذب . ولم تكد تظهر فكرة الإمكان العارض Lacontingence حتى نفذت إلى صميم كيان عمايات الاستدلال بحيث أضعفت من أهمية الصدق أو الكذب النهائي ، ووضعت أهمية السلامة المنطقية في المكان الأول ، وأبرزت أهمية التفكير المبني على الفروض في دائرة الاستدلال والقائم على أساس المسلمات .

فالصدق في المنطق الرمزي الجديد هو صدق المعنى كصورة منطقية وصحة التكوين المنطقي الخالص . وقد يكون الاستدلال صادقاً بدون صدق منطقي . وقد يكون الاستدلال كاذباً وهو صادق منطقياً . وكثيراً ما تكون العبارات صادقة

من جانب سور القضية أو كم المحمول Quantification ولكنها لا تكون صحيحة منطقيًا^(١) .

وبناء على ذلك أقر لانجفورد وليويس في كتابهما عن المنطق الرمزي سنة ١٩٣٢ الاعتماد نهائياً على التسلسل المنطقي الصحيح والاستلزام القضوي أى لزوم أن تترتب قضية على أخرى ، واعتمد اعتماداً كلياً على فكرة السلامة المنطقية التي تظهر مع صحة ما يترتب على القضايا أو يستجد من الاستدلالات بعينه بالنسبة إلى البعض الآخر . ومن هنا تولدت فكرة أن البناء المنطقي إذا صح معناه كان منطقياً ، فيكون البرهان صحيحاً منطقياً في حالة واحدة فقط ، هي أن يكون من غير المتوافق أو المقبول منطقياً قبول المقدمات ورفض النتائج . فالبرهان الاستدلالي خيط يتخذ صورة يكون من التناقض قبول مقدماتها ورفض نتائجها .

ومعنى هذا أنه ينبغي أن تفصل بين المنطق الرياضي والمنطق الرمزي الجديد . وبرغم أن المنطق الجديد ينتمي إلى محاولات قديمة ظهرت في أواخر القرن الماضي وامتدت جذورها إلى صفحات عديدة في كتب المناطق في أوائل هذا القرن ، فإنه من الصعب إطلاق اسم المنطق الرمزي على غير المنطق الجديد المختص بالتحليلية analyticity أو بالصورية الكاملة ذات المعاني المترتبة على تكوين الهيكل الصوري نفسه . فالصدق في المنطق الجديد هو صدق المعنى التحليلي ،

(١) من بين موضوعات العلوم الحديثة مسائل تحول صعوبة عرضها دون الشروع في عرضها باللغة العربية لأول مرة . ومثل هذه العروض الأولية مسائل جديدة صعبة المنال تتطلب جرأة كبيرة وتؤدي عادة إلى الاتهام بالغموض . ولكن أليس الغموض المبتلى في مطلع العلم أولى من عدم وجود أى مادة بخصوص أحد الموضوعات في لغة تدعى أنها من لغات العالم الأساسية كاللغة العربية ؟

أى سلامة البناء المنطقي المؤدى داخل العمليات ، وهذا هو ما يميز المنطق الرمزي من سواه (١) .

وقد بدأت ملامح هذا المنطق الجديد النهائية تتضح عندما نشر كواين بحثه المشهور عن الأسس الجديدة للمنطق الرياضى معلقاً على نظرية رسل وهوايتيد فى كتابهما المسمى بالبرنكيبييا فى سنة ١٩٣٧ ، فأظهر كواين كيف اكتشف رسل أن نظرية الجبر المجرد يمكن استقاؤها من منطق العلاقات ، وأن هذه النظرية تؤدى إلى تعميمات رائعة ضخمة توفر للعلماء آلة منهجية قوية لم يكن يتمتع بها منطق أرسطو .

واعتمد منطق رسل على ثلاثة أقسام هى منطق القضايا ومنطق الفئات أو الأصناف ومنطق للعلاقات . وامتازت الأفكار البدائية الخاصة بالحدود والألفاظ التى عبر بها ذلك الحساب الجديد بأنها منطقية خالصة . (راجع كتاب أصول الرياضيات لرسل فى الترجمة العربية ص ٤٣) .

غير أن التقدم الذى أحرزه المنطق الجديد بعد رسل أدى إلى إظهار حقيقتين هامتين :

أولاهما : أن أسس كتاب البرنكيبييا قد سادها غموض شديد بسبب الدالة القضيةية ، وأدى وجود هذه الدالة فى البرنكيبييا ودورها الذى لعبته فى نظرية الاصناف (اللافئة) إلى ظهور النقص الشديد فى موقفه ، إذ أن منهجه يستبعد الأصناف (الفئات) بسبب تمسكه بعالم تجريدى مماثل خاص بالأشياء الكلية أسماه بالدالة القضيةية . وقد ترتب على غموض هذه الدالة فى منطق البرنكيبييا وفساد استخدامها

(١) قد تثير كلمة المعنى إشكالات كثيرة هنا . ولكن المتابع للمنطق الرياضى وطريقة استعمال لفظة المعنى عند فريجه وعند كواين يدرك أن المعنى المقصود فى المنطق الرمزي هو المعنى المنطقي أو المعنى الصورى الذى يشير إليه تكوين العبارة فى حد ذاته بغض النظر عن مادة الكلام نفسها .

أنها كانت تشير أحياناً إلى العبارة المفتوحة وأحياناً أخرى تعنى الصفة . وتستعمل نظرية رسل عن الالفئة عبارة الدوال القضوية بمعنى الصفات كقيم للمتغيرات المقيدة . ولهذا فلا يمكن أن نطمع منها في أكثر من تحويل بعض الكليات إلى سواها ورد الأصناف إلى صفات^(١) .

ولكن بما أن نظرية الصفات هي نفسها على طول الخط نظرية الأصناف بدون أى اختلاف فقد كان الأجدر الاكتفاء بهذه النظرية وفقاً لمبدأ الهوية بين اللامميزات .

وأخيراً : أن عدد الأفكار المنطقية الواردة في كتاب البرنكييا أضخم من أن يحتملها المنطق الرمزي الجديد . فقد أثبتت الأبحاث الجديدة في هذا المجال أن عدد الأفكار المنطقية لدى رسل أكبر من أن تصلح للمنطق الرمزي . فالمنطق الرمزي يحتاج إلى أقل عدد ممكن من الأفكار المنطقية . وثبت فعلاً أنه يمكن أن يستغنى عن كل الأفكار المنطقية لدى رسل ما عدا ثلاثاً من بينها هي :

١ - الانتماء : وعلامته (e) وتتحكم في كل ما يوجد بين القوسين .

٢ - رفض أحد البديلين : ويعبر عنه بالعلامة « / » في كتابنا هذا

وبالعلامة « ١ » في كتاب البرنكييا .

٣ - التكميم الكلي أو كم المحمول الكلي Universal quantifier : ويعبر

عنه باستخدام إحدى المتغيرات بين قوسين قبل العبارة مثل (س) (س e ص)

ومعناها هنا في وضعها قبل العبارة (أيا تكن س) . ومعنى الصيغة أنه أياً كان س

ينتمي إلى ص .

(١) استعملت لفظة « فصل » في ترجمة لفظة class في أصول الرياضيات - الترجمة

العربية - عن برتراند رسل . والواقع أن السائد الآن استعمالان يغلبان بحسب المناسبة وهما :

الصنف والفئة . والاستعمال الأول أصبح ، ولكن الثاني يساعد أحياناً بدرجة أكبر على

الوضوح .

وبالتالى، تصبح كل الرياضيات وكل المنطق أيضاً موضوعاً يترجم بلغة أخرى. هذه اللغة الجديدة هى المنطق الرمزى المؤسس على عدد لا نهائى من المتغيرات أ، ب، ج، د، س، [ص، ل، ط. وكذلك آ، ب، الخ. . . . وعلى هذه الحالات الثلاث الخاصة بالتأليف بين الترميزات .

وقد استطاع كواين أن يشرح لأول مرة حقيقة للمنطق الرمزى الجديد فى هذا البحث الهام الذى أشرنا إليه . واهتم فيه بأن يبرز جوانب المنطق الرمزى كافة على أساس أبسط الأفكار المذكورة فى وضوح تام داخل إطار الفكرة الجديدة لهذا العلم .

واستطاع هذا الكتاب الذى تترجمه اليوم إلى اللغة العربية أن يبرز كل جوانب هذا العلم الجديد بصورة دقيقة موجزة واضحة فى آن معاً بحيث يمكن أن يدرسه الطالب بمفرده فيقف على كافة أجزائه . وهو كتاب لغير المتخصصين تخصصاً غالباً لأنه يقصد جمهوراً واسعاً من الطلاب لا جمهوراً خاصاً من الباحثين والمتخصصين . .

وغنى عن البيان أن فوائد هذا المنطق الجديد كثيرة ومتفرعة . فهو يستهدف تسلسل البراهين والاستدلالات تسلسلاً يضمن أعلى قدر من الضمان واليقين . وبمجرد إقامة حساب البديهيات الخاص بنظرية الاستدلال على أساس صورى خالص لانكاد نجد حاجة ما إلى بذل أى جهد فى تناول وتداول الرموز ؛ إذ لا تلبث عملية تداول الرموز أن تستحيل إلى مجرد استدلالات للصيغ المتكافئة بعضها محل بعض وتصبح بالتالى موضع تحكم كامل .

وفيد هذا المنطق الرمزى الجديد فى الاقتصاد فى الفكر ، فهو يوفر لنا كثيراً جداً من الجهود ومن التشعب الفكرى ، ويسمح لنا بمجرد اكتشاف الهوية بين عدد من الأبنية ببسط البراهين المثبتة إلى مجال آخر غير المجال الأسبق . ولا شك

أن المنطق الرمزي قد استطاع التخلص نهائياً من منطق التصورات ، وأدى ذلك بالتالي إلى تجريد وتعميم لم يكن يسهل بلوغهما مع استمرار التجريد التصوري لدى القدماء .

ولعلنا نكون قد أوضحنا هنا خط السير الجديد الذي رسمه ظهور المنطق الرمزي . وأهم شيء هو أن نتعرف على بزوغ هذا المنطق الجديد ، فهذا من شأنه أن يعرفنا على حقيقته ، بناء على موقفه المستحدث وبناء على فهم يغير الفهم القديم ويحدد لنا الفارق بينه وبين المنطق الرياضي .

وإذا لم تكن الكتب العربية قد عاجلت للآن هذا المنطق فذلك قصور يستوجب سرعة العلاج ونقص يتطلب جهداً كبيراً يتفق مع حاجة البلاد إلى التكنولوجيا المعاصرة ، فهذا هو أول الطريق إلى التكنولوجيا .

د. عبد الفتاح الديدي

تصدير

يوفر هذا الكتاب للمبتدئ في المنطق الصوري مقدمة موجزة تعد وافية بشأن النقاط الهامة التي تمثل الأساس لدراسة كتب أخرى ذات مستوى أعلى . فتعرف الفصول الأربعة الأولى بحساب القضايا ، كما يقدم الفصلان الأخيران صورة مجملة عن حساب المحمولات الذي بذل فيه اهتمام خاص بالفكرة الأساسية الخاصة عن الاستيفاء Satisfiability ، ويعمد ملحق الكتاب إلى إجمال المذهب التقليدي الخاص بالقياس وعلاقته بالحساب الجبري الخاص بالفئات على نحو ما حدده بول Boole ، ولا يتطلب الكتاب أى معرفة سابقة بعلم المنطق ، ورغم أن القسم الأول من الفصل الأول سيكون موضع اهتمام الطلاب الذين بلغوا بعض المعرفة بالمنطق التقليدي الخاص بالقياس .

وبرغم أننا حاولنا أن نبلغ درجة الإيجاز المعقولة في مثل هذا الكتاب الأولى فقد كان المقصود به هو المبتدئ لا المنطقى المتقدم في مجال بحثه ، لأنه سيأخذ عليه بلاشك التزام البساطة في العرض . وتحاشينا أى نقاش فلسفى حتى فيما يتعلق بالمسألة الهامة التي تخص علاقة المنطق باللغة العادية .

ووضعنا ملاحظات مستوفاة المراجع من أجل إرشاد الطالب نحو قراءات أوسع ، كما زودنا الكتاب بالتمارين اللازمة . ولعلنا نؤكد هنا أن أهمية حل التمرينات تعادل في فهم كتاب أولى عن المنطق أهميتها في الرياضيات .

المؤلفان

أ. هـ. بيسون

د. ج. أوكونر

سنة ١٩٥٣

تنبيه من المترجم

حاولت في الترجمة ألا أتعصب لأى مصطلح مهما كانت قيمته، ومهما كان تقديرى لصاحبه . لقد عانيت دراسة هذا المنطق ، وقمت بالتدريبات العملية الخاصة بدروسه، وألقيت عدة محاضرات بالسوربون عن بعض جوانبه تحت إشراف أستاذى الراحل باشلار ، فضلا عن دراستى له بألمانيا على إشتيكمولر وأنسب الألفاظ المترجمة هي المختارة في هذا الكتاب .

الفصل الأول

تمهيد

١ - المنطق الرمزي والمنطق القديم

تاريخ المنطق الرمزي قصير ، في حين يحظى المنطق الأرسطي التقليدي أو الكلاسيكي بتاريخ طويل ، غير أن الاختلاف بينهما هو مجرد اختلاف في مراحل التطور ، فالمنطق التقليدي مرتبط بالمنطق الرمزي كارتباط الجنين بالجسم البالغ . ومن الضروري تأكيد هذه النقطة منذ البداية بسبب ما أثير من النقاش والخلاف حول طبيعة المنطق الرمزي ومكانته في الخمسين سنة الأخيرة بخاصة . ووجه بغض المناطقة المتفلسفين الذين نشأوا في ظل المنطق التقليدي تقدم أحيانا إلى المناطقة الرمزيين على أساس أن المنطق الجديد ينطوي على إساءات فهم باللغة عن طبيعة المنطق . ونقد المناطقة الرمزيون أحيانا عيوب المنطق التقليدي كما لو كان شيئا متخلفا عن زمنه .

وصار الآن من المتفق عليه بين المناطقة أن المنطق الرمزي الجديد تطوير للتصورات « والتقنيات » أو العمليات الفنية ^(١) التي تضمنها الكتاب الذي ألفه أرسطو عن المنطق ، غير أن هذه الواقعة قد سادها الغموض وقتاً طويلاً بسبب التاريخ العجيب لهذا الموضوع . إذ كان أرسطو قد وضع أسس المنطق بذكاء وبصورة كاملة في القرن الرابع قبل الميلاد ، حتى تخيل الكثيرون من

(١) التقنيات بمعنى الصناعة الفنية Technic تستخدم اليوم عادة كترجمة صوتية عربية على طريقة القدامى في التعريب : أنا لوطيقا - فيزيقا - استيطيقا وهكذا . ونعتقد أنها صارت نجارية اليوم على الألسن . (المترجم)

جاءوا بعده أن علم المنطق قد أصبح تاماً كعلم . ولكن صار من المحقق الآن أن مؤلف أرسطو عن المنطق قد غطى جزءاً صغيراً من أجزاء المنطق وإن كان بالغ الأهمية . بل يرجع بعض السبب في إخفاق المناطق في إضافة أى إضافات ذات قيمة في هذا الموضوع خلال الألفين التاليين من السنين إلى كمال هذا الكتاب الذى وضعه .

وأظهرت الدراسة الحديثة جداً في تاريخ المنطق أن كلا من الإغريق الذين جاءوا بعده أرسطو ومن المدرسين الذين جاءوا في العصور الوسطى قد قاموا بعدة اكتشافات منطقية هامة ، غير أن أهمية هذه الاكتشافات لم تكن قد تبينت بعمامة في الوقت الذى تمت فيه ، وبالتالي فقد أخفقت في المبادرة بأى تجديد في تطور نظرية المنطق وعملياته الفنية أو تقنياته . وكان سبب ذلك مزدوجاً . فقد أدى الاعتقاد العام بأن كل الاكتشافات المنطقية سبق أن قام بها أرسطو ، إلى الحيلولة دون تقدير أى اكتشاف جديد تقديراً يتناسب مع قيمته الحقيقية ، غير أنه يوجد سبب آخر أكثر أهمية وهو حالة العلوم الرياضية المختلفة قبل القرن السابع عشر .

لقد قدم أرسطو في المنطق فكرة ذات أهمية بالغة وهى فكرة المتغير Variable وتعد هذه الفكرة اليوم شيئاً بالوفاء تماماً لدى الرجال والنساء المثقفين لأنهم يلقونها في أثناء كل حصص الجبر الابتدائى . والمتغير رمز يقوم مقام أى سلسلة من المقادير والقيم . فإذا كان لدينا —

$$س = ٤$$

كانت س متغيراً محل محل كل من المقدارين : $٢ +$ و $٢ -$ وإذا كان لدينا —

$$س + ٧ = ٧$$

كان س ، متغيرين يمران بصف الأعداد واحداً واحداً ابتداءً من الصفر حتى ٧ . وهكذا .

ويعلم استخدام المتغيرات مألوفاً جداً في الرياضيات الأولية بما لا يدعو إلى
أى حاجة للتوضيح هنا . غير أنه لم يصبح مألوفاً إلا خلال تطور المغرفة
الرياضية وانتشارها . ووقف استخدام أرسطو للمتغيرات في المنطق عند حد
تمثيل الحدود المستعملة في براهين القياس بواسطة الحروف من أجل إبراز البناء
المنطقي الخاص بالبراهين التي تنتمي إلى هذا النوع بطريقة أكثر وضوحاً . إلا
أن استخدام المتغيرات في المنطق الرمزي يعد أكثر اتساعاً من ذلك^(١) . ولكن
ينبغي أن نعتقد أن هذا وحده لم يكن الطريق الذي اختطته الرياضيات
في تطورها وسارت فيه من أجل المشاركة في تجديد المنطق وتأسيس المنطق الرمزي .
ولكى يسهل علينا تصور الطريقة التي تجددت بها أبواب المنطق سنرجع إلى
مقالة أحد المناطقة المحدثين المبرزين وهو ليويس C. I. Lewis : حينما حاول أن
يسجل ثلاث خصائص مميزة للمنطق الرمزي :

أولاً : يتميز المنطق الرمزي باستخدام الرموز العقلية أو الإيديوجرامات
Ideograms التي تشير مباشرة إلى التصورات بدلاً من العلامات الصوتية أو
الفونوجرامات Phonograms التي تشير مباشرة إلى الأصوات وإن كانت تشير
إلى التصورات أيضاً ولكن بطريقة غير مباشرة .

مثال ذلك الرمز الدال على عملية الضرب (×) أو علامة الاستفهام (؟) .
فهى كلها رموز عقلية (إيديوجرامات) شأنها في ذلك شأن الحروف الكتابية في
اللغة الصينية . أما الألفاظ المكتوبة مثل « علامة الضرب » أو « علامة الاستفهام »
فتمثل مباشرة الألفاظ المنطوقة التي تناظر كلا منهما كما هو الحال في كل اللغات
المكتوبة وفقاً لبعض القواعد الصوتية اللغوية .

ثانياً : يتميز المنطق أيضاً بالمتنج الاستنباطي (أو بالاستدلال) . وهذا

(١) كل القضايا المثلة برموز في حساب القضايا على نحو ما سيأتى فيما بعد هي
متغيرات (المترجم)

مألوف لطول ماورد بالكتب المدرسية في علم الهندسة والخاصة المميزة لهذا المنهج هي القدرة على توليد عدد لا حصر له من الأحكام الجديدة الباهرة من عدد صغير من الأحكام عن طريق تطبيق عدد قليل من القواعد .

ثالثاً : يتميز المنطق الرمزي أيضاً باستخدام المتغيرات ذات المواضيع المحددة من الدلالات . (وقد سبق ذكر هذه النقطة من قبل) .

وهذه الخصائص المميزة الثلاث للمنطق الرمزي هي أيضاً كما هو واضح خصائص مميزة للرياضيات نفسها بحكم أن تطور المنطق الرمزي ارتبط ارتباطاً تاماً بتطور الرياضيات . ومن الأشياء ذات الدلالة هنا أن كل الرواد في هذا الموضوع كانوا إما من المتخصصين في الرياضيات أو من الفلاسفة ذوي المران الطويل على مناهج الرياضيات وذوي التقدير أيضاً لهذه المناهج .

وكان أول الأسماء الهامة في تطور المنطق من صورته الكلاسيكية التقليدية إلى صورته الرمزية الحديثة هو ليبنتس G. w. von Leibniz (١٦٤٦-١٧١٦) وكان مشهوراً كفيلسوف بنفس قدر شهرته كمتخصص في الرياضيات لأنه عرف بوصفه شريك نيوتن في اختراع حساب التفاضل (differential Calculus) ونشر كتاباً قبل بلوغه العشرين تحت عنوان « بحث في فن التأليفات » ضمنه خطة ذات شقين من أجل إصلاح المنطق . واقترح أولاً إنشاء لغة علمية عالمية يمكن تمثيل كافة التصورات العلمية فيها عن طريق التوافق والتأليف بين الرموز العقلية أو الإيديوجرامات الأصلية . ويتمى هذا الاقتراح إلى حقل اللغويات أكثر مما ينتمى إلى المنطق فيما عدا اقتراحه بإحلال الإيديوجرامات أو الرموز العقلية محل الفونوجرامات . أو العلامات الصوتية . أما اقتراحه الثاني فأكثر أهمية . إذ اقترح ليبنتس في بحثه ذلك أن الحساب العالمى للاستدلال العقلى قد يكون اختراعه مفيداً في توفير منهج آلى لحل كل المشكلات التى يعبر عنها باللغة العالمية . ولو حقق اقتراحه لزودنا بنسق من المنطق الرمزي . غير أن خطته بقيت مجرد اقتراح لم يتطور .

أما الاسم الثاني الذى يتصف بالأهمية بصدد تطور المنطق الرمزي فهو اسم جورج بول (١٨١٥ - ١٨٦٤) . وكان بول من المشتغلين بالرياضيات واحتل كرسي الرياضيات في كوينز كولييج بإقليم كورك . وتألفت إضافته العملية من صياغة نسق جبرى تقوم فيه المتغيرات مقام الفئات أو الأصناف ، وتمثل فيه كل من عمليتي الضرب والجمع طرقاً مختلفة لتأليف الأصناف من أجل استخراج أصناف أرفع . وقد تم عرض النسق أول الأمر في كتاب صغير يسمى « التحليل الرياضى للمنطق » ونشر هذا الكتاب سنة ١٨٤٧ . وأعاد بول تطبيق نسقه الجبرى في عدة أفرع من المنطق بينها قياس المنطق التقليدى نفسه في دراسة أخرى تحت اسم قوانين الفكر . وقصد بول من هذه الدراسة إظهار أن من الجائز أن يكون المذهب الخاص بالقياس الأرسطى : الذى كان ينظر إليه على أنه يسد نفس الحاجات والمستويات التى يسدها منطق الاستنباط ، حالة خاصة من بعض أنواع الجبر المنطقى . ولم يمض وقت طويل حتى أظهر أتباع بول أن نسقه الجبرى كان مجرد أحد ضروب الحساب الرمزي الذى يتألف منه المنطق نفسه .

ومن الأعمال الهامة التى قام بها منطقة القرن التاسع عشر ذلك العمل الذى حققه أوجسطس دى مورجان (١٨٠٦ - ١٨٧١) فى منطق العلاقات وذلك الذى حققه جيفونز (١٨٣٥ - ١٨٨٢) عندما أخذ على عاتقه مهمة تبسيط جبر الفئات (الأصناف) المنطقى الخاص ببول ثم تطويره^(١) . غير أن أهم اسم أمريكى هو بيرس (١٨٣٩ - ١٩١٤) الذى شارك مشاركات ذات أهمية قصوى فى كل فرع من أفرع المنطق . وكانت له كتابات مطروحة فى هذا الميدان لم ينشر أغلبها . وتبينت روعة ما سجله وتميز به فى القرن الحالى فقط

(١) نترجم *Class* بصنف أو فئة ونعتقد أنها أفضل من « فصل » كما استخدمت من قبل .

عندما تم تجميع كتاباته وأمكن نشرها .

وفي هذه الأثناء كان عدد من المختصين في الرياضيات على أرض القارة الأوروبية يشغلون أنفسهم بأسس الرياضيات ويهتمون بها . وقد واصل أعمالهم ، وبخاصة أعمال كل من جوتلوب فريجه Frege وجيسيبا بيانو Peano ، الفيلسوف الإنجليزي برتراند رسل ويسمى لورد رسل حالياً . . . فقد تعاون كل من رسل وهوايتيد سنة ١٩١٠ على إصدار أصول الرياضيات المعروفة باسم البرانكيبيا ، وهو كتاب ضخم الأثر تم فيه تأصيل نسق للمنطق الرمزي وقصدي به . أن يوضع ويستقر كأساس لكل الرياضيات . ووجدت أعمال كل السابقين طريقها إلى التنفيذ والتأييد الرمزي أو الرياضي للمنطق في كتاب رسل وهوايتيد . وكان هذا الكتاب بمثابة التبشير بالتحول المنطقي الذي جرى في أثناء القرن الماضي . وتقديم المنطق تقدماً ملموساً ، ونما نمواً ضخماً منذ ظهور كتاب البرانكيبيا الرياضية

ويهمنا أن نلاحظ أن نمو المنطق مضي بطيئاً هادئاً إلى حد بعيد منذ عصر ليبتنس من خلال عمله الأساسي في حقل الرياضيات . ولكن أهمية المنطق الرمزي لا ترجع أصلاً إلى دراسة أسس الرياضيات برغم أن هذه الأسس هي بعض المجالات التي يمكنه فيها أن يفيد فائدة محققة ، إذ يشارك المنطق الرمزي المنطق التقليدي أيضاً في وظيفته التي يقوم بها من أجل تدبير منهج لاختبار صحة البراهين التي تتخلل اللغة العادية ، كما أنه يقدم مناهج من أجل تقرير صدق أصناف البراهين وأنماطها التي لا يملك المنطق القديم القدرة على اختبارها . وفضلاً عن ذلك يوفر المنطق الرمزي إجراء ييسر به تحليل بناء القضايا (١) . ولعل هذا من الأشياء الملائمة بل الضرورية أحياناً بالنسبة إلى البرهان الفلسفي ؛ فهذا البرهان الفلسفي كثيراً ما يتعرض بسبب العيوب والتناقضات الموجودة في (١) انظر الفقرة الأولى من الفصل الثاني من هذا الكتاب حيث شرح لفظة : قضيه .

تعبير الحياة اليومية لغموض معنى الأحكام وعدم وضوح العبارات . والواقع أن المنطق الرمزي يقوم بكل الأعمال والمهام التي اعتاد أن يقوم بها المنطق التقليدي كما يقوم أيضاً بمهام أخرى كثيرة لم يستطع أن يوفيهها المنطق التقليدي حقها . وهذا هو ما كان يجب أن نتوقعه إذا كان المنطق الرمزي صورة متطورة للمنطق التقليدي وخطوة جديدة مستحدثة من خطواته^(١) .

٢ - استعمال الرموز

من وظائف المنطق الأولى أنه يوفر مناهج اختبار لصحة البراهين . ومن أجل استيفاء هذه الوظيفة وتحقيق هذه الغاية علينا أن نكون قادرين على تصنيف البراهين وتقسيمها إلى أصناف أو أنواع مختلفة بحيث يكون من خاصية كل نوع منها أن يتصف بملامح معينة مشتركة مع بقية البراهين من نفس هذا الصنف . وتسمى الملامح أو الصفات التي تشترك فيها هذه البراهين على هذا النحو مع غيرها من نفس الصنف « الصورة المنطقية » للبرهان . وسوف نتناول هذه الصورة المنطقية في الفقرة التالية ولا حاجة بنا إلى أن نقول أكثر من ذلك الآن بهذا الصدد . غير أن المنهج التقليدي الخاص بتصنيف البراهين إلى أنماط أو أنواع الذي ابتدعه أرسطو كان يتضمن أيضاً عملية استخدام الرموز .

خذ مثلاً الزوجين التاليين من البراهين :

(١) لا توجد مجتمعات رأسمالية مستقرة . وبعض المجتمعات الرأسمالية من الديمقراطية . إذن فبعض الديمقراطيات غير مستقرة .

(١) النقطة الرئيسية التي أدت إلى التحول الحقيقي في المنطق هي الاستفادة إلى أقصى

حد من فكرة الصورية في المنطق الأرسطي نفسه . ولهذا فكل هذه المحاولات السابقة التي تهدف إلى إشباع المنطق بالأفكار الرياضية لاتعد سوى بداية مجازية لتاريخ المنطق الرمزي أما البداية الحقيقية فتبدأ بمنطقة الرياضيات أولاً ثم العودة إلى صورية أرسطو ثانياً (المترجم) .

انظر كتاب النفسانية المنطقية للمترجم ص ١٥ - ١٦

(٢) ليس من بين الزوج بابوات للكاتوليك وبعض الزوج مسلمون . إذن فبعض المسلمين ليسوا بابوات للكاتوليك .

(٣) إذا ارتفع سعر الذهب ازدادت الواردات ولكن الواردات لن تزداد . إذن فلن يرتفع سعر الذهب .

(٤) إذا تسبب الجليد في تكوين الوادي كانت هناك صخور منحوتة ولكن لم يكن ثمة أية صخور منحوتة . إذن لم يتسبب الجليد في تكوين الوادي .
إذا فحصنا هذه البراهين كان من السهل ملاحظة ما يلي :

أولاً : أنها صحيحة .

وثانياً : أنه يوجد شبه بين كل من البرهانين ١ ، ٢ وكذلك بين كل من البرهانين ٣ ، ٤ .

ويلاحظ أن التشابهات لا تتوافر بين محتوى أو مضمون هذه البراهين المشار إليها . ذلك أن مضمون البرهان رقم (١) لا علاقة له بمضمون البرهان رقم (٢) . وكذلك لا علاقة لمضمون البرهان رقم (٣) بالبرهان رقم (٤) ولكن إذا أحللنا الجروف أ ، ب ، ج محل الحدود الموجودة في البرهانين رقم (١) ، (٢) برزت التشابهات بوضوح بينهما . إذ يصبح كلا البرهانين الأوليين (١) ، (٢) على النحو التالي :

(٥) لا أحد في أ هو ب وبعض أ هو ج .

إذن ليس بعض ج هو ب .

وبالمثل إذا أحللنا الحروف س ، ص محل مكونات البرهانين (٣) ، (٤) لتوافر لدينا .

(٦) إذا كان س

إذن ص

ولكن لا س

إذن لا ص

وعلى ذلك فاستعمال الرموز (في هذه الحالة هي حروف الألفاظ) يعيننا على استخراج ملامح ذات أهمية منطقية في البراهين حتى يتيسر وضعها في تصنيفات نوعية يمكننا أن نطبق عليها القواعد العامة .

وتسمى الرموز المستخدمة في الأمثلة السابقة بالمتغيرات لأنها تستطيع أن تقوم بلا أدنى اختلاف مقام أى حدود أخرى من ناحية أو أى أحكام من ناحية أخرى . ويعاوننا استخدام المتغيرات على وضع قواعد عامة من أجل اختبار صحة البراهين وسلامتها . ولذلك نستطيع أن نقول إن أى برهان من النوع التالى :

إذا كان لا أ هو ب

وكان بعض أ هو ج

إذن فبعض ج ليس ب

هو برهان صحيح .

وأى برهان كان من النوع التالى :

إذا كان س إذن ص

ولكن لا س إذن لا ص

هو أيضاً برهان صحيح

وعلى ذلك يكون التعبير عن عمومية قواعد المنطق إحدى وظائف الرموز المنطقية الهامة . غير أن هذه ليست على أى حال وظيفتها الوحيدة . إذ أن استخدام الرموز في المنطق له أيضاً أهمية ثانية معادلة للأهمية السابقة من حيث إنه يوفر الإيجاز الدقيق والاقتصاد في التعبير بالنسبة إلى الأحكام المعقدة التى يصعب مقدمة في المنطق الرمزى.

أو يستحيل فهمها إذا وضعت في تعبير باللغة العادية ^(١) واستعمال الرموز على هذا النحو جار بوضوح في الجبر الابتدائي . انظر مثلاً في الزوج التالي من التعبيرات المتعادلة :

(٧) حاصل ضرب كل من ناتجى جمع وطرح عددين معادل للفرق بين مربعى هذين العددين .

$$(٨) (١ + ب) (١ - ب) = (١ - ب^٢)$$

فسنلاحظ أن معنى العبارة رقم (٧) يحتاج إلى جهد عقلى معين لإدراكه على حين يتضح معنى العبارة رقم (٨) مباشرة لأى شخص يعرف استخدام الرموز الواردة فيها .

وحيثما كانت التعبيرات أكثر تعقيداً كانت أقوال اللغة العادية أبعد وأشد غموضاً من أن تعبر عن معانيها بوضوح .

ولعله يكون من الممكن التعبير بغير استعمال الرموز عن حكم كالتالى :

« تعبر الصيغة التالية :

$$س = \frac{ب + \sqrt{ب^٢ - ٤ج}}{٢}$$

عن جذور المعادلة لقيمة س

$$أس^٢ + ب س + ج = صفر .$$

(١) يقول رسل (أصول الرياضيات - جزء أول - ترجمة الأهوانى ومرسى أحمد - ص ٤١) : لم يصبح المنطق الرمزى اليوم أساسياً فقط لكل منطقي مشغول بالفلسفة بل هو ضرورى كذلك لفهم الرياضة عامة وهو لازم حتى لممارسة بعض فروع الرياضة ممارسة ناجحة . وكل الذين خبروا السلاح القوى الذى وضعته الدراية بهذا العلم فى أيدي الباحثين يدركون مقدار فائدته العلمية . (المترجم)

ولكن التعبير اللغوي المناظر لهذا الحكم سيكون معقداً وثقيلاً بحيث يصبح من الصعب نفسياً فهمه .

وتصبح فوائد الإيجاز الدقيق والوضوح التي يوفرها استعمال الرموز ملحوظة جداً حيال أكثر أصناف الاستدلال الرياضي تعقيداً . ولعله من الجائز من الناحية النظرية التعبير عن الصيغ أو أنواع الحساب الرياضي بلغة الحياة اليومية بدون أى مساعدة من نظام رمزي خاص . غير أننا لو حاولنا ذلك لأمكن سريعاً جداً بلوغ آماذ الفهم العملي التطبيقي . ولا مفر عادة من الرجوع إلى نسق رمزي خاص من أجل فهم تعبيرات الرياضيات ومن أجل الاشتغال بها . ويصدق هذا أيضاً على المنطق بمجرد الانطلاق إلى مدى أبعد من مستوياته البسيطة أو التقدم بعض التقدم في مجالاته .

وليست هذه هي الفوائد الوحيدة من الأنساق الرمزية المنطقية . إذ يوجد في كل علم مصطلحات وعبارات تقنية فنية متخصصة تعبر عن التصورات الخاصة بالعلم المشار إليه . وهذه المصطلحات التقنية الفنية في الرياضيات قد وضعت في الغالب في أنساق رمزية مناسبة بواسطة علامات دالة على العمليات العقلية (إيديوجرامات) .

ومن أشهر الأمثلة الخاصة بالتصور concept الحديد المرموز إليه برموز عقلية (إيديوجرامية) خاصة هو العلامة الدالة على الصفر في الحساب ، إذ كانت تخلو علامات الترقيم الحسابية في اليونانية واللاتينية من رمز يشير إلى « الصفر » وأدى ذلك بالتالي إلى أن بعض عمليات الحساب البسيطة مثل :

$$— ٦٠٣٢ \times ٥٤$$

$$— ٢٤٢٥ \div ٢٥$$

وهي مما يستطيع أدائه اليوم تلميذ المدرسة في العاشرة من عمره . . . هذه العمليات البسيطة كانت تتطلب حينذاك مقدرة رياضية ذات شأن ، وقدرًا كبيراً من العمل والجهد . وعلينا أن ننظر فقط فيما كان يثول إليه حساب الرياضيات لو لم يتوافر لنا بعض العلامات والرموز الخاصة مثل علامات الضرب والطرح والترقيم وعلامات التفاضل وما إلى ذلك . فذلك يرينا مدى أهمية الرموز العقلية الخاصة (الإيديوجرامات) في تمثيل عمليات الحساب الرياضي . وسوف نحتاج في المنطق أيضاً إلى رموز تمثل العمليات المنطقية بالإضافة إلى المتغيرات التي وردت آنفاً .

٣ - الصورة المنطقية

قلنا ما فيه الكفاية عن استخدام الرموز في المنطق لا من أجل إظهار التحذلق وحسب بلغة رمزية نترجم إليها كل مادة منطقية نداولها وإنما على العكس من ذلك استجابة لضرورة وجود مثل هذه اللغة لدينا من أجل فهم المنطق وتطوره . ولا بد أن نرجع الآن إلى موضوع هام جداً وردت إشارة عابرة إليه في الفقرة السابقة وهو الصورة المنطقية .

يعدّ التمييز بين المادة التي يصنع منها الشيء وصورته أو شكله أو هيئته تمييزاً مألوفاً للحس العادي . فالمثال يستطيع أن يقوم بنحت تمثال نصفي من الطين أو الرخام أو الخشب أو أي مادة تشكيلية أخرى . والصورة أو الشكل الذي يسعى المثال لكي يفرضه على المادة الموجودة بين يديه هو هو في كل حالة . أما المادة فتختلف . وبالمثل يمكن أن تكون المادة هي في حين تتخذ أشكالا وصوراً مختلفة . وقد تصاغ قطعة من الرصاص وتشكل على أي نحو نريده تحت تأثير الحرارة والضغط . وقد يستحيل الماء إلى ثلج أو إلى بخار عن طريق تغيير الحرارة .

وفكرة الصورة المنطقية مجرد امتداد بالتناسل أو بالاستعارة لهذه الفكرة العادية (١) .

ويعتد مثل هذا الامتداد في التشبيه لفكرة الصورة أو البناء الهيكلي مألوفاً من ضروب السياق الأخرى التي ترد فيها . إذ جرت العادة أن يتعلق الكلام بقطعة موسيقية في صورة سوناتا ، أو بشعر في صورة قصيدة غنائية بحيث تمتد فكرة الصورة أو تعميم لكى يتم تطبيقها على الأشياء الأخرى غير المادية . وبالمثل نقوم بتطبيق تصور « البناء الهيكلي » الذى يستخدم أصلاً فيما يتعلق بالأشياء المادية مثل الأبنية أو الأنظمة على الوحدات التي لا تخضع للتفكير كمادة عندما نتحدث عن « بناء المجتمع » أو عن « بناء العقل اللاشعورى » .

إذن فنحن لا نعد التصور بغير وجه حق عندما نتكلم عن الصورة المنطقية أو البناء ، فالبناء ، أو الصورة أو الهيئة الخاصة بالشئ تتكون عن طريق وضع الأجزاء معاً حسب العلاقات المتبادلة بين الأجزاء . ولذلك نستطيع الكلام عن الصورة المنطقية الخاصة بالحكم أو بأى مجموعة من الأحكام المكونة للبرهان ، وعندئذ نكون قد عمدنا إلى تمييز الصورة أو البناء الخاص بالحكم أو الخاص بالبرهان من مادته أو مضمونه . ففى الأمثلة رقم (١) ، (٢) فى الفقرة الثانية (السابقة) كانت الحدود (المجتمعات الرأسمالية) و (المجتمعات المستقرة) و (الديمقراطية) من ناحية و (الزواج) و (البابوات) و (المسلمون) من ناحية أخرى تقوم بإبلاغ مضمون البرهان أو مادته . أما العبارة :

(لا أحد فى « أ » هو « ب »)

(١) يفضل أن يفهم الطالب فكرة أرسطو عن المادة والصورة وفكرة الفن الدقيقة فى التفرقة بين الشكل الخاص بالتمثال ومادة التمثال قبل أن يتقدم إلى هذه النقطة لأن تفرقة المناطق بين صورة العبارة ومادتها هو امتداد لنفس الفكرتين . (المترجم)

وبعض « أ » هو « ج »

إذن ليس بعض « ج » هو « ب »

هذه العبارة لا تعطينا سوى صورة البرهان عن طريق إظهار العلاقات بين الأجزاء المكونة لهذا البرهان . وسوف نرى في الفصول الأخيرة من هذا الكتاب كيف نهتم ونعنى في المنطق بصورة البراهين فقط لا بمادتها أو مضمونها . وذلك واحد من الأسباب التي تجعلنا نستغنى عن الألفاظ التي تشير إلى المضمون ونذهب إلى وضع المتغيرات محلها .

وسوف نرى أن موضوع الفقرة السابقة المتعلق باستعمال الرموز في المنطق مرتبط ارتباطاً وثيقاً بموضوع الصورة المنطقية . ومن أولى فوائد الترميمات أو العلامات الرمزية الجيدة في المراحل التمهيدية للدراسة المنطق أنها تعتمد إلى فصل الصورة المنطقية من المادة التي تحملها وإلى إبرازها أو إظهارها بوضوح . ومن فوائد المنطق الرمزي ومميزاته التي يتميز بها الآن على حالته في الماضي عندما كان لا يزال تقليدياً متخلفاً هو أنه يضم جداول رمزية أكثر كمالاً . ومن شأن هذه الجداول الرمزية أن تعيننا على عرض الصور المنطقية الخاصة بالبراهين التي لم يستطع المنطق الأرسطي أن يحتوي عليها أو يضمها بين دفتيه . (بل إن برهاناً بسيطاً مثل قولنا : إذا كانت لندن أكبر من باريس وباريس أكبر من روما إذن لندن أكبر من روما . . . مثل هذا البرهان لم يكن يمكن إدماجه وإدابته في الصور النموذجية الخاصة بالمنطق التقليدي) .

ولكن لماذا ينبغي أن يهتم المناطق بالصور المنطقية ؟ والجواب عن ذلك هو أن صحة البراهين تتوقف على صورها المنطقية . وبوصفنا مناطق نجد أنفسنا مهتمين خاصة بالصحة والسلامة المنطقية .

وقد تبدو هذه الإجابة عجيبة لأول وهلة . إذ قد يبدو أن الهدف من

الاستدلال والجدل ينحصر في بلوغ نتائج صادقة بحكم أن الاهتمام الرئيسى للمناطق ينصب على الصدق أكثر مما ينصب على الصحة والسلامة في الأداء المنطقي Validity .

غير أن طول التفكير يجعلنا نكتشف أنه يوجد شرطان ضروريان من أجل ضمان صدق النتائج في أى عملية من عمليات الاستدلال :

أولاً : يجب أن يكون البرهان أو المقدمات (التى نبني عليها استدلالنا) صادقة .

ثانياً : يجب أن تكون الاستدلالات نفسها صحيحة أو سليمة (أو صالحة) على حد قولنا في بعض الأحيان . ون بين هذين الشرطين لا يستطيع المنطق أن يضمن سوى الشرط الثانى أن صحة وسلامة الاستدلالات نفسها . وذلك لأن صدق تلك القضايا التى لا يتم استنباطها صورياً من قضايا أخرى ينبغى أن يتأكد بوسائل خارج نطاق المنطق الصورى .

ولما كان فصل مسألة الصدق على هذا النحو من مسألة الصحة والسلامة المنطقية يبدو شيئاً غريباً كان مما يستحق التأكيد هنا أن بين هاتين المسألتين ارتباطاً ضيقاً جداً .

ومن الواضح أنه في حالة وجود أدلة غير صحيحة لا يكون هناك ارتباط ضرورى بين صدق المقدمات أو كذبها وصدق النتيجة المستخلصة من تلك المقدمات أو كذبها . وقد تؤدي المقدمات والنتيجة إحدى الحالات الأربع الممكنة :

صديق	صديق
صديق	كاذب
كاذب	صديق
كاذب	كاذب

ولعل ذلك هو السبب في أن الأدلة غير الصحيحة لا تكون ذات جدوى ولا تكسب الاهتمام ، غير أن حالة الأدلة الصحيحة لا تختلف كثيراً لأول وهلة ؛ إذ لا تعدو واحدة فقط من بين الحالات الأربع السابقة الممكنة فيما يتعلق بالصدق والكذب في المقدمات والنتائج . . . لا تعدو واحدة فقط من بينها أن تكون مستحيلة ، وهي الحالة التي تصدق مقدماتها وتكذب نتائجها . ويمكن أن تحدث فيما عدا ذلك أية حالة من الحالات الثلاث الأخرى . وقد يبدو من غير المقبول أن نقيم استدلالاً سليماً من مقدمات كاذبة إلى نتائج صادقة . غير أن البرهان القادم يمثل برهاناً صحيحاً صحة تامة :

– كل أباطرة الرومان كانوا رؤساء للولايات المتحدة الأمريكية .

– وكان لينكولن إمبراطوراً رومانياً .

– إذن كان لينكولن رئيساً للولايات المتحدة الأمريكية .

فها هنا النتيجة صادقة برغم كذب كل من المقدمتين وسلامة البرهان .

فالواقع أن الضمان الوحيد الذى توفره سلامة البرهان المنطقية هو أنه إذا كانت المقدمات في البرهان السليم صادقة كانت النتيجة أيضاً بالتأكيـد صادقة . وحيثما لم تكن المقدمات صادقة لا نعرف إذا كانت النتيجة صادقة أو كاذبة حتى لو تأكدنا من سلامة البرهان وصحته .

وعلى ذلك لا يصرف المنطق اهتمامه مباشرة إلى صدق الوقائع الواردة في الأحكام حتى إذا كانت تلك الأحكام مقدمات أو نتائج للأدلة والبراهين . وإنما يصرف المنطق اهتمامه إلى الصدق بطريق غير مباشر فقط بقدر ما يكون ذلك الصدق مرتباً على سلامة البرهان الذى قد يؤدي صدق مقدماته إلى

وعلى ذلك سنغنى في الفصول القادمة بمناهج اختبار صحة صور البرهان المختلفة ، وستنطوي هذه المناهج على الالتفات أساساً إلى البناء أو الهيكل المنطقي أو الصورة المنطقية الخاصة بالبراهين من وجهة النظر التي تقرر أن صحة البرهان المنطقية تعتمد وتنبني على شروط أو ملامح معينة في صورته المنطقية . وسيكون من الملائم في سبيل تجريد مادة البرهان والانشغال بالصورة المنطقية وحدها أن نأخذ في تمثيل كل البراهين من نوع معين عن طريق ترقيم رمزي مناسب أو وضع علامات ورموز مناسبة . حتى تستوى الملامح الخاصة بالهيكل البنائي وتخضع للاختبار .

في هذا كله سينصب اهتمامنا على التطبيق العملي للمنطق الرمزي .

غير أنه من الضروري أن نراعي أن المنطق شأنه شأن أي علم آخر لا يدرس أولاً وقبل كل شيء لأسباب متعلقة بنفعه (٢) . إذ أن تطور التقنيات المنطقية تطوراً يعلو على الضرورة من شأنه أن يوفر لنا معياراً لاختبار صحة الصور الاستدلالية ، ويرجى لذاته على نحو ما يرجى تطور الرياضيات البحتة لذاته . وتوجد أفرع كثيرة في الرياضيات لم يكتشف لها بعد تطبيق عملي في مسائل الهندسة الآلية أو العلوم الطبيعية أو الإحصاء . وهذا صحيح أيضاً في علم المنطق الرمزي وهو أكثر منها جدة وحداثه . غير أنه حتى الأفرع التي نمت وتطورت أصلاً لأهميتها الكامنة فيها قد تبينت قدرتها على التطبيق العملي وعلى النفع في معظم

(١) وسوف نرى فيما يقبل من الصفحات أن صحة البرهان مترتبة ارتباطاً قوياً جداً بالصديق المنطقي لبعض الأحكام . وإن كان هذا جانباً من موضوع آخر .

(٢) يمكن مراجعة فوائد المنطق الرمزي بكتاب أصول الرياضيات كما يمكن تأمل وظائف النظرية والكتاب لرسول ترجمة الدكتورين محمد مرسى أحمد وأحمد فؤاد الأهواني ص ٤٢ وما بعدها حيث يشير إلى أنه ضروري لفهم الرياضة نفسها . (المترجم) .

المبادئ نفعاً أكيداً ابتداء من إنشاء الآلات الحاسبة حتى تخطيط المجالات الكهربائية .

وسنغنى في هذا الكتاب بالأجزاء العملية الأكثر أولية وتقليدية في الموضوع . ولكن لا ينبغي أن ننسى أن المنطق موضوع سريع التطور حالياً ، وأن الكثير من مجالات المعرفة الشاسعة غير المطروقة لا يزال قائماً وراء حدوده الحالية .

٤ - الاستدلال والاستلزام

نظرنا في بعض الأمثلة الخاصة بالبراهين الصورية البسيطة في الفقرة الثانية من هذا الفصل من أجل تقديم فكرة الصورة المنطقية .

ولكى نسوق على ذلك مثلاً من تلك الأمثلة نعيد النظر في المثل رقم (١) الذى كانت عبارته كالآتى :

(١) لا توجد مجتمعات رأسمالية مستقرة وبعض المجتمعات الرأسمالية من الديمقراطية . إذن فبعض الديمقراطيات غير مستقرة .

وكان في إمكاننا صياغة هذا التعبير على النحو الآتى كذلك :

(١أ) إذا لم تكن المجتمعات الرأسمالية مستقرة وكانت بعض المجتمعات ديمقراطية إذن فبعض الديمقراطيات غير مستقرة .

غير أننا لا نلبث أن نلاحظ اختلافاً بين (١) ، (١أ) ويكاد يكون الاختلاف كبيراً . ذلك أن (١أ) حكم منطقي ينص على أنه « إذا » توافرت شروط معينة ترتب على ذلك بعض النتائج . ولا يشير هذا الحكم المنطقي بحال من الأحوال إلى ما إذا كانت هذه الشروط المشار إليها في العبارة المسبوقة « بل إذا » تتوافر في الواقع الحقيقى أم لا .

فالمثل الأول (١) من ناحية مختلف جداً ؛ إذ أن مقدماته تقيم أحكاماً

تقريرية معينة ، وتسوق هذه الأحكام التقريرية بدورها إلى إيجاد حكم تقريرى آخر كنتيجة منطقية مرتبة على الأحكام السابقة . أعنى أنها تنشئ الواقعة الواردة فى النتيجة .

وعلى ذلك لكى نجد مسوغاً إلى تقرير الحكم رقم (١) نكون مضطرين إلى معرفة أن الصورة المنطقية للبرهان لا تضمن فقط أن النتيجة تترتب على المقدمات ، وإنما نكون مضطرين أيضاً إلى معرفة أن المقدمات صادقة . وكما رأينا من قبل تعد هذه النقطة الأخيرة الخاصة بشرطية صدق المقدمات غير ذات علاقة بمسألة السلامة المنطقية .

وهكذا نجد من ناحية أخرى تسويغاً فى تأكيد (أ ١) بدون أى حكم مسبق فيما يتعلق بمسألة الصدق أو الكذب فى المقدمات . وأشد المعارضين للماركسية مثلاً يجد نفسه قادراً على أن يؤيد الحكم (أ ١) فى حين لا يقوى على تأييد الحكم رقم (١) . ويستطيع تأييد الحكم رقم (أ ١) لأنه سيكون بصدق قول لا يعنى أكثر من أنه « .

» إذا صدقت المقدمات

كانت النتيجة إذن صادقة .

ولكى تبرز هذا التمييز الهام جرت العادة بتسمية البراهين من نوع (١) باسم استدلالات فى حين يطلق على الأحكام من نوع (أ ١) اسم استلزامات . فإذا أقمنا استدلالاً حكمنا فوراً بصدق المقدمات بمجرد تأكيدها . ونجد أنفسنا بالتالى قادرين على تأكيد النتيجة بناء على صدق المقدمات وعلى صحة البرهان المنطقية، على حين لا نلزم أنفسنا إطلاقاً بصدق المقدمات عندما نقوم بعملية استلزام .

وسيكون من الصواب الحاسم فى أى كتاب تعليمى متداول للمنطق إعداد كل

الأمثلة والنماذج في صورة استلزامات implications ما دمنا لا نعبأ بصدق مادة الكلام ومضمونه في المقدمات وإنما نهتم فقط بصحة صورة التعبير المستخدم صحة منطقية . وبرغم ذلك فن المحتمل أن يكون التعبير عن الأمثلة المنطقية كبراهين أكثر شيوعاً . ونعني بالتعبير عنها كبراهين أنها تكون في صورة استدلال لأن معظم براهيننا في حياتنا العادية يقصد بها عادة تحقيق صدق النتيجة ، ولا بد أن تصاغ وتحسب على هذا النحو . ولهذا سوف نضع أمثلتنا هنا كاستدلالات ما دام ذلك هو الأمر الأوفق والملائم . غير أنه يجب أن يراعى القارئ ذلك التمييز بين الاستدلال والاستلزام حتى لا ينشأ عن ذلك أى خلط (١) .

مراجع هذا الفصل

لا يوجد في اللغة الإنجليزية تاريخ للمنطق يشرح تطور المنطق الرمزي . غير أن كلا من بوشنسكى (٣) ولو كازيفيتش (٢١) يفيدان فائدة كبيرة فيما يتعلق بتاريخ المنطق المتقدم على هذا العصر في علاقته بالمنطق الحديث . ويربط بينر (٤) بعض التطورات في منطق العصور الوسطى بالمنطق الرمزي الحديث . غير أنه لا يعنى بغير التلخيص الجمل . ويجد المرء تناول الكافى للمنطق القياسى القديم لدى كينز (١٧) ويوجد تحليل واف مبسط لفكرة الصورة المنطقية في كتاب لانجر (١٩)

ملحوظة : الترقيم الوارد في ثبث المراجع بنهاية كل فصل يشير إلى الترقيم الخاص بالمراجع في نهاية الكتاب باللغة الأصلية .

(١) يلاحظ أن فكرة الاستلزام هي أهم خاصية في الرياضيات غير الإقليدية ، في حين يعد الاستدلال في حد ذاته أهم خصائص الرياضيات الإقليدية . وقد حاول المنطق الحديث والرياضة الحديثة أن يكونا إقليديين ولا إقليديين في آن معاً . وكل هذه المحاولات هي التي أنصبت المنطق الرمزي الحديث . (المترجم) .

الفصل الثاني

حساب القضايا

١ - القضايا وعلاقاتها

يعرف حساب القضايا بأسماء أخرى مثل الحساب القضوي أو حساب العبارات . ويعد حساب القضايا بمثابة جزء أساسي من المنطق أو نقطة البداية لدراسة المنطق الرمزي .

والمفهوم من لفظة قضية أى عبارة يجب أن تكون إما صادقة أو كاذبة ولا يمكن أن تكون صادقة وكاذبة في آن معاً . فإذا قيل مثلاً :

الزرنبيخ سام

$$9 = 7 + 2$$

هزم نابليون في ووترلو

كانت هذه كلها قضايا . وعلى ذلك نحن نعني بالقضية نفس المقصود بالمصطلح النحوي « العبارة الإخبارية » .

ولا تلبث أن تثور مشكلات وصعوبات فلسفية كثيرة بمجرد محاولتنا تحديد تصور القضية على نحو أكثر دقة ووضوحاً . غير أن أغراض المنطق تحول لنا أن نتجاهل هذه الصعوبات وتسمع لنا بتخطي كل العقبات .

والقضايا في هذا الفرع من المنطق هي الوحدات الأساسية . تقوم القضايا في المنطق الرمزي مقام الوحدات الأساسية . أى أننا بعبارة أخرى لن نسعى لتقسيم هذه الوحدات إلى أجزائها المكونة لها على نحو ما يلزم عند اختبار صحة بعض أنواع البراهين .

لنفرض مثلاً أننا بصدد فحص صحة برهان من النوع التالى :

١ - كل المهن الخطرة ذات مرتبات باهظة .

العمل فى المناجم مهنة خطيرة .

إذن فالعمل فى المناجم ذو مرتبات باهظة .

وهذا بطبيعة الحال برهان صحيح وسليم . غير أن سلامته أو صحته لا تتضح إلا بتقسيم أو تحليل القضايا التى يتألف منها البرهان إلى حدودها وأجزائها التى تتكون منها . فهو برهان صحيح أو سليم بفضل بعض العلاقات الماثلة بين الحدود « العمل فى المناجم » و « المهن الخطرة » و « المهن التى تتكلف مرتبات باهظة » .

وفى استطاعتنا أن نعبر عن صورة هذا البرهان بعد تجريده من مضمونه على النحو الآتى .:

٢ - كل أ هى ب

ولكن س هى أ

إذن س هى ب

ولننظر فى البرهان القادم الذى يشبه المثل رقم (١) شهاً سطحياً :

٣ - إذا كان العمل فى المناجم مهنة خطيرة كانت مرتباته باهظة .

والعمل فى المناجم مهنة خطيرة .

إذن فلا بد أن يكون العمل بالمناجم ذا مرتبات باهظة .

ويلاحظ هنا أن المضمونين فى البرهائين متطابقان تطابقاً هويّاً أو متكافئان على حد تعبيرنا العادى ، وأن النتيجة هى فى كلتا الحالتين . غير أنه يوجد اختلاف هام جداً فيما بينهما . فى رقم (٣) ليس علينا أن نقوم بتمزيق القضايا الداخلة فى تكوين البرهان من أجل إثبات صحة هذا البرهان وسلامته . ذلك أن البناء المنطقى أو الصورة المنطقية الخاصة بالبرهان يمكن أن يعبر عنها

إذا أحللتنا (س) محل القضية « العمل بالمناجم مهنة خطيرة » وأحللتنا (ص) محل القضية « لا بد أن يكون العمل بالمناجم ذا مرتبات باهظة » على النحو التالي :

٤ - إذا كان س

إذن ص

ولكن س

إذن ص

وهذه في الواقع صورة سليمة وصحيحة للبرهان بغض النظر عن مضمون القضايا التي حلت محلها س ، ص . وسوف نغنى في تناولنا لحساب القضايا بالبراهين التي تعد من هذا الصنف الثاني^(١) .

ولن يشغلنا بأي حال مضمون القضايا وإنما سنغنى فقط بالمعالم الجوهرية المشتركة في كل القضايا وهي إمكان الصدق أو الكذب . وسبق أن عرفنا طابع القضية المميز بأنه ينبغي أن يحمل قيمة واحدة فقط من بين القيمتين الخاصتين بالصدق والكذب . ويطلق عادة على الصدق أو الكذب في القضية اسم قيمة الصدق وقيمة الكذب . وعلى ذلك فسوف نهتم بحساب القضايا القائمة على قضايا ذات قيم صدق ، وكذلك بالطرق المختلفة التي تأتلف فيها هذه القضايا وما يترتب على تلك التآلفات . وقد يبدو هذا غامضاً الآن ، ولكنه سوف يتضح كلما تقدمنا في الدراسة .

وبذلك نحن نبدأ من التصور البديهي للقضية الذي نجده في الاستعمال

(١) هذه الصورة المنطقية هي أساس الاستلزام في المنطق الرمزي وهي صورة سهلة بسيطة ولكنها كانت مصدر اكتشافات هائلة في المنطق الحديث . وهذا الشكل نفسه هو ما عرفه العرب الأقدمون باسم قياس الاستثناء (لوجود لكن بداخله) انظر القضايا المعاصرة للفلسفة ص ٢٤٩ تأليف عبد الفتاح الديدي .

العادى . ونألف كذلك فى الكلام العادى فكرة أن القضايا قد تأتلف فى طرق مختلفة وأنها قد تكون منفية . إذ يمكن مثلا إدماج القضيتين « انخفضت دلالة مقياس الضغط الجوى (البارومتر) » « سوف تهب عاصفة » على النحو التالى :

٥ - إذا انخفضت دلالة البارومتر فستهب العاصفة .

٦ - إما أن تكون دلالة البارومتر قد هبطت أو أن العاصفة ستهب .

٧ - انخفضت دلالة البارومتر وستهب العاصفة .

وقد ترد منفية على النحو التالى :

٨ - ليست دلالة البارومتر منخفضة .

٩ - لن تهب العاصفة .

وسيتضح لنا فى التو أن القضايا المركبة رقم (٥ ، ٦ ، ٧) والقضايا المنفية (٨ ، ٩) يسرى عليها كذلك نفس تعريف القضية السابق . أو بعبارة أخرى تخضع هذه الأحكام كلها لواحدة فقط من قيمتى الصدق والكذب .

ولذا أهملنا المعنى أو المحتوى الخاص بهذه القضايا المركبة والقضايا المنفية أمكننا إحلال حروف هجائية محل العبارات الأصلية غير المركبة وغير المنفية . وبهذا نحصل على التعبيرات التالية :

١٠ - إذا كان س

إذن ص

١١ - إما س أو ص

١٢ - س ؛ ص

١٣ - لا س

١٤ - لا ص -

وبمثل هذه التعبيرات المركبة على أنحاء ودرجات شتى من التعقيد سنشغل أنفسنا فى حساب القضايا .

٢ - دالات الصدق

فكرة الدالة من الأفكار المألوفة في الرياضيات الأولية^(١) . ويقال إن العبارة دالة ذات متغير واحد أو جملة متغيرات إذا تحددت قيمة هذا التعبير فقط كلما اتخذ المتغير الواحد أو جملة المتغيرات قيمة محددة . مثال ذلك التعبير الآتي :

$$ي = ٣ س + ٢$$

فتكون ي دالة س لأن قيمتها تتحدد بمجرد تحديد قيمة المتغير س . فإذا كانت س تعادل الصفر كان قيمة ي تعادل ٢ . وإذا كانت س تعادل ٧ كانت قيمة ي تعادل ٢٣ . وإذا كانت قيمة س تعادل - ٤ كانت قيمة ي تعادل - ١٠ وهكذا إلخ . . .

وبالمثل في التعبير التالي :

$$ط = ٢ س - ٤ ي + ٦$$

تكون ط دالة المتغيرتين س ، ي . وإذا تحددت قيمة كل من المتغيرتين تحددت كذلك قيمة ط . وعلى ذلك فإذا أخذت س ، ي قيمة تعادل ١ صارت قيمة ط تعادل ٤ . وإذا كانت س تعادل ٣ وكانت ي تعادل ٤ كانت قيمة ط = - ٤ . وهكذا إلخ . . .

وتبين أن المنطق يستطيع أن يذهب في استفادته من فكرة الدالة على النحو التالي . فقد رأينا أن كل قضية تأخذ إحدى قيمتي الصديق أو الكذب . ورأينا كذلك أن القضايا التي تكون مركبة أو منفية على نحو ما سبق هي أيضاً إما

(١) تعرف دالة القضية عندما تقرر أنها مكافئة لدالة قضية سبق للتسليم بعدم إمكان تعريفها أو سبق تعريفها بدلالة خاصة بما لا يمكن تعريفه . والفكرة الأساسية هي دالة للقضية وهي لا تفهم إلا باستخدامها . وهنا ي س دالة قضية في حالة ما يكون لكل قيمة من قيم س ، ي س قضية تتضح وتتعين بناء على تعيين دلالة س أو قيمتها . (المترجم)

كاذبة أو صادقة . بل أكثر من ذلك أن الصواب أو الخطأ في القضية المركبة أو المنفية يتحددان فقط بواسطة قيم الصديق الخاصة بتعابيراتها الأصلية . وذلك كما تتحدد القيمة العددية للدالة الرياضية البسيطة وفقاً للقيم الخاصة بالمتغيرات الجارية في الدالة (١)

دعنا نأخذ مثلاً من العبارة المركبة :

١ — الشمس ساطعة ودرجة الحرارة ٧٠ فهرنهايت .

وستكون العبارة رقم (١) صادقة في حالة واحدة فقط وهي عندما تصدق العبارتان المكونة منهما . فإذا كانت إحداهما أو كليهما كاذبة فستكون (١) كاذبة . ويمكن التعبير عن هذه الحقيقة على النحو الآتي : فلنمثل العبارات المكونة (الشمس ساطعة) و (درجة الحرارة ٧٠ فهرنهايت) بكل من س ، ص على التوالي واضعين في تقديرنا أننا لا يعنيها ما تحمله العبارات المشار إليها من معان وإنما يعنيها فقط قيم الصديق الخاصة بها . إذن نستطيع أن نمثل توقف القيمة في العبارة المركبة (١) على القيم الخاصة بالعبارات المكونة لها على النحو ما يلي :

س	ص	س ، ص
صادقة	صادقة	صادقة
صادقة	كاذبة	كاذبة
كاذبة	صادقة	كاذبة
كاذبة	كاذبة	كاذبة

(١) تقوم المتغيرات مقام أعداد في الحساب وافترضنا أنها أعداد يلزم عنه وجود الصيغة . ولكن عند صياغة قضايا الرياضة البحتة صياغة كاملة يكون للمتغيرات مجال غير مقيد أو مستوى لا محدود . فأى شيء يمكن أن يحل محل أى متغير من متغيراتها دون أن يؤثر ذلك . أما الثابت فيجب أن يكون شيئاً محدداً تحديداً مطلقاً ولا إبهام فيه على الإطلاق . فالثابت محدد أما ما لا يبدل على شيء محدد بالذات فهو متغير . (المترجم)

وعندئذ تكون العبارة المركبة (س ، ص) دالة الصدق بالنسبة إلى العبارات المكونة لها (س) ، (ص) لأننا إذا عرفنا القيم في العبارات المكونة تحددت بناء على ذلك القيمة الخاصة بالعبارة المركبة . ويسمى المنهج الخاص بالجدول الذى يمثل هذا الارتباط بالصورة السالفة جدول الصدق . وسيكون من الواضح بطبيعة الحال أن جدول الصدق المائل ينطبق على كل القضايا المركبة التى تكون القضيتان المكونتان لها متصلة بحرف العطف (و) ، ولا يقتصر الأمر على العبارة (١) وحدها التى اتخذناها مثلاً عينياً .

وفى إمكاننا إقامة جداول صدق بقدر حاجتنا إلى تمثيل دالات صدق أخرى بنفس الطريقة . فمثلاً يعد نى أى قضية دالة صدق لتلك القضية كما يظهر من جدول الصدق التالى :

س	لا - س
صداقة	كاذبة
كاذبة	صداقة

٣ - جداول الصدق الأساسية فى حساب القضايا :

رأينا أن المادة الأساسية لحساب القضايا من نوعين :

أولاً : حروف أبجدية مثل س ، ص ، ل وهكذا (وأحياناً س^١ ، س^٢ ، س^٣ وهكذا) تشير إلى القضايا . وتسمى هذه الحروف بوضعها ذاك فى حساب القضايا باسم المتغيرات أو متغيرات القضايا لأنها قد تشير إلى أى قضية دون أى اعتبار .

ثانياً : ألفاظ مثل « لا » - « و » - « أو » - « إذا كان . . . إذن » التى تربط بين متغيرات القضايا داخل تعبيرات دوال الصدق أو ما يسمى بالتعابير

المركبة مثل (لا س أو ص) أو (إذا كان س إذن لا - ص) التي تعتمد قيم الصدق الخاصة بها على قيم الصدق الخاصة بالقضايا المكونة لها . وهذه الألفاظ التي تقوم بالربط هي ما يعرف باسم « الثوابت المنطقية » .
ومن الملائم (ومن المتفق عليه) تمثيل هذه الثوابت المنطقية بواسطة رموز صناعية على النحو الآتي :

يشار إلى (لا س) بالعلامة (~ س)

ويشار إلى (س و ص) بالعلامة (س . ص)

ويشار إلى (س أو ص) بالعلامة (س V ص)

ويشار إلى (إذا كان س ، إذن ص) بالعلامة (س C ص)

ومن الملائم أيضاً من أجل كتابة جداول الصدق بتحديد موجز استخدام هذه العلامة (T) أو الترقيم (١) للإشارة إلى الصدق والعلامة (F) أو (O) للإشارة إلى الكذب . ونستطيع الآن أن نتعقب دوال الصدق الأساسية الخاصة بحساب القضايا واحدة واحدة مع استعمال هذه العلامات .

دالة التناقض The Contradictory Function

عند نفي أى قضية نحصل على قضية أخرى كاذبة إذا كانت القضية الأصلية صادقة ، ونحصل على قضية أخرى صادقة إذا كانت القضية الأصلية كاذبة . وعلى ذلك إذا كانت القضية التالية :

(توجد حيوانات الكنجارو في أستراليا)

صادقة كانت القضية المنفية

(لا توجد حيوانات الكنجارو في أستراليا)

أو (من الخطأ أنه توجد حيوانات الكنجارو في أستراليا)

كاذبة

وبالمثل إذا كانت القضية التالية :

(نيرون كان أول رئيس للولايات المتحدة الأمريكية)

كاذبة كانت القضية المنفية :

(نيرون لم يكن أول رئيس للولايات المتحدة الأمريكية)

أو (من الخطأ أن نيرون كان أول رئيس للولايات المتحدة الأمريكية)

صادقة

ويمكن إيجاز هذه الوقائع بطريقة ملائمة في جدول الصدق التالي :

س	~ س
١	٠
٠	١

وعلى ذلك فإذا وضعنا علامة النفي (~) في مقدمة أى قضية تغيرت قيمتها من (١) إلى (٠) أو من (٠) إلى (١) . وبالتالي فإذا قمنا بنفى أى قضية منفية حصلنا على القضية الأصلية : أعنى أن إثبات (~ ~ س) يكون إثباتاً للقضية (س) .

دالة الوصل

سبق أن تناولنا دالة الوصل بصدد العبارة رقم (١) في الفقرة الثانية . ويمكن وضع جدول الصدق الخاص بالدالة على النحو التالي :

س	ص	س . ص
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	٠
٠	٠	٠

دالة الفصل The Disjunctive Function

دالة الصدق الخاصة بالفصل في القضايا هي عبارة عن قضية مركبة يوصل فيها بين قضيتين (أو أكثر) فتصبحان قضية واحدة بواسطة الأداة (أو) . والأداة (أو) من الأدوات الغامضة في كثير من اللغات ولها في اللغة الإنجليزية على الأقل معنيان متميزان ، وعلى ذلك فقبل أن نضع جدول الصدق لدالة الفصل يتعين علينا أن نقرر أى معنى من المعنيين سنقتصر عليه من أجل تحقيق الأغراض المنطقية .

إذا قلت مثلاً :

(سيكون حزب المحافظين أو حزب العمال في الحكم بعد الانتخابات)
فسيكون المقصود بوضوح من . . . هذا القول أن هذا الحزب أو ذاك سيتسلم السلطة والحكم ولكن ليس كليهما .

ومن ناحية أخرى إذا قيل (أما محمد أو سعاد فسوف يلتقى بك عند المحطة) فلن تصاب بالدهشة أو تعتقد أن المبلغ كان يقصد التعبير بك إذا كان كل من محمد وسعاد على المحطة في انتظار لقائك .

ومن هنا قد تعنى (س أو ص) معنى وحيداً انفرادياً مؤداه (أما س أو ص ولكن ليس كليهما معاً) أو قد تعنى معنى تضمينياً آخر مؤداه (أما س أو ص ومن الجائز كلاهما) .

وقد رثى أنه من الملائم في سبيل تحقيق أغراض المنطق التمسك بالمعنى الثانى من المعنيين السابقين وتفسير الأداة (أو) بالتالى تفسيراً يستأثر بالمعنى التضمينى . وعلى ذلك يصبح جدول الصدق بالنسبة إلى دالة الفصل على النحو التالى :

س	ص	س ٧ ص
١	١	١
١	٠	١
٠	١	٠
٠	٠	٠

وبذلك تكون القضية المركبة (س أو ص) صادقة في كل حالة ما عدا الحالة التي تكون فيها كلتا القضيتين المكونتين كاذبتين .

دالة الاستلزام : The Implicative Function

لا تزال واحدة من الثوابت المنطقية المشار إليها فيما سبق تستوجب المناقشة . ذلك أن دالة الاستلزام « إذا كان س . . . إذن ص » دالة هامة جداً في المنطق^(١) . ولكن مهمة بناء جدول صدق خاص بها يبرهن عليها بوصفها دالة صدق للقضايا المكونة لها ليست بالبساطة التي شهدناها في الحالات السابقة . وسبب ذلك هو أن استخدامنا العادي في الكلام لعبارة « إذا كان . . . إذن » بالإنجليزية لا يتصل بجدول الصدق الخاصة بالقضايا المترابطة بواسطة هذه العبارة .

أما في حالة الدوال الثلاث السابقة فتعد الاستعمالات العادية في حياة كل يوم للألفاظ (لا ، و ، أو) بوضوح تام دالات صدق . وبذلك يمكننا بناء

(١) ترجع أهمية الاستلزام على هذا النحو إلى أن الرموز هنا تشير عادة إلى قضايا فهي تعتمد إذن إلى التعبير عن قضايا كاملة . خذ مثلاً : إما أن يكون كل إنسان كائناً حياً أو لا تكون الحيوانات كائنات حية — ولكن من المستحيل تكون الحيوانات ليست كائنات حية — إذن فكل إنسان كائن حي . وهذه يمكن صياغتها رمزياً على النحو التالي : إما س أو ص — ولكن لا ص — إذن س . وهذا شكل آخر غير الشكل المعروض هنا ولكننا نستبق الإشارة إليه لتوضيح صورة القضية وبيان دورها . (المترجم)

جداول الصدق الخاصة بهذه الثوابت المنطقية عن طريق الإشارة إلى معاني الحياة اليومية الخاصة بما يقابلها من الألفاظ .

فكيف إذن نقيم جدول الصدق الخاص بدالة الاستلزام بدون تحريف للمعنى العادى الخاص بعبارة .

« إذا كان . . . إذن » . . . ؟

من حسن الحظ أننا نستطيع التعبير عن الثابتة المنطقية (إذا كان . . . إذن) بواسطة ثابتتين منطقيتين سبق أن أنشأنا جدولى الصدق الخاصين بهما . ذلك أن معنى التعبير (إذا كان . . . إذن) معادل من حيث جوهره لتعبير (إما لا س أو ص) .

فالعبارتان :

- ١ - إذا ارتفع سعر الذهب ازداد الإفلاس .
 - ٢ - إذا هاجمت أمريكا روسيا ، تهلمت أوروبا .
- يمكن التعبير عنهما على التوالى بغير أدنى تغيير فى المعنى على النحو التالى :
- ٣ - إما ألا يرتفع سعر الذهب أو سيزداد الإفلاس .
 - ٤ - إما ألا تهاجم أمريكا روسيا أو ستهدم أوروبا .

ولا يعدو الاختلاف بين صيغتي التعبير أن يكون بلاغياً برغم أن الصيغة الأخيرة أقل اعتياداً من الأولى .

وعلى ذلك فنحن فى وضع يسمح لنا ببناء جدول الصدق الخاص بدالة الاستلزام بطريق غير مباشر إذا أقمنا جدول فصل القضية المنفية والقضية المثبتة . ويمكننا تحقيق ذلك بالطريقة التالية :

س	~ س	ص	~ س	ص
١	٠	١	١	١
١	٠	٠	٠	٠
٠	١	١	١	١
٠	١	٠	٠	٠

وبهذا يتحقق جدول الصديق الخاص بالقضية س ب ص على النحو التالي :

س	ص	س	ب	ص
١	١	١	١	١
١	٠	٠	٠	٠
٠	١	١	١	١
٠	٠	٠	٠	٠

ويلاحظ أن هذا الاستعمال للثابتة (إذا كان - إذن) المعروفة كدالة صديق للقضية (س) والقضية التابعة لها (ص) أكثر اتساعاً من الاستعمال اللغوي العادي في التعبير ، فالاستخدام العادي لعبارة الاستلزام في اللغة العادية يتجلى في تقرير ارتباطات عليّة أو ارتباطات ضرورية بين واقعة وأخرى مثل قولنا :

(إذا ارتفعت حرارة قطعة من الحديد ازداد حجمها) .

فهنا يكون قصدنا أن نستلزم أن كلا من القضيتين الأولى والتابعة صادقة ، وأن صديق الأخيرة يبنى على صديق الأولى أو يكون لازماً بناء على صديق الأولى .

وينظر هذا الاستخدام جداول الصديق الأولى الواردة فيما سبق .

ولكن يوجد استخدام اصطلاحى لعبارة الاستلزام المناظرة لجداول الصديق

الأخيرة ، فعندما يقول المدرس لأحد تلاميذه :

(إذا نجحت في الامتحان فسا كل قبعتي) .

فإنما يكون قصده تضمين الكذب في كلتا القضيتين الأولى والتابعة مهما يكن صدق التأكيد الوارد في عبارة الاستلزام . ولكن ذلك لا يعنى أكثر من التعبير البلاغى عن الإنكار الشديد للقضية الأولى .

وبرغم ذلك فهما تكن هذه التماثلات بين تفسير دالة الصدق في عبارات (إذا كان - إذن) واستخدامنا العادى في الحديث لمثل هذه العبارات فإن جدول الصدق الخاص بالثابت المنطقى (\vdash) يبدو ذا مفارقات عديدة . ويتلو مثلاً عن تعريف الثابت المنطقية (إذا كان - إذن) على ذلك النحو أن القضية الصادقة تكون لازمة بناء على أى قضية صادقة أو كاذبة ، وأن القضية الكاذبة تستلزم أى قضية صادقة كانت أو كاذبة^(١) .

ويبدو بطبيعة الحال من المغالطة الجسيمة اعتبار الأمثلة التالية استلزامات حقيقية :

٥ - إذا كان بروتس قد قتل قيصر كانت أفريقيا مليئة بالأسود .

٦ - إذا كان قيصر قد قتل بروتس كانت أفريقيا مليئة بالأسود .

٧ - إذا كان نبرون قديساً مسيحياً كانت $١٦ = ٧ + ٥$

وتبدو هذه الاستلزامات أمام التفكير البسيط العادى كأنها ليست صادقة ولا كاذبة وإنما مجرد عبث بغير معنى . وسبب ذلك أن الاستعمال العادى لقولنا : (إذا كان - إذن) فى ربط العبارات على صورة استلزامات يفترض مقدماً أن معانى العبارات التى ارتبطت على ذلك النحو (وليس قيم الصدق

(١) من بين كل المعانى المعروفة يقتصر الثابت المنطقى [\vdash] على الإشارة إلى معنى :

إذا كان - إذن . وبمثابة « الوصل الموحد » الأوحى والذى لا يحتوى على « ليس » . وهو أبسط الأشكال التحليلية . خذ مثلاً دلالة صيغة التحليل فى قولنا : (س هو الوالد الأصغر) تستلزم (س له أخ) بعد تحويله إلى الشكل الآتى : س الولد الأصغر \vdash س له أخ .

(المترجم)

الخاص بها) هي التي تحدد ما إذا كان الاستلزام صادقاً أو كاذباً . وهذا صحيح . غير أنه ليس مسوغاً كافياً لرفض التناول لمنطق القضايا من وجهة نظر دوال الصدق . ولعلنا مسوغ كاف لعدم استخدام لفظة (استلزام) الخاصة بعبارات (إذا كان — إذن) عند تفسيرها في معنى من معاني دوال الصدق .

والواقع أن العادة جرت الآن أكثر من أى وقت مضى لإعطاء هذه العلاقة اسم (الاستلزام المادى)^(١) من أجل تمييزها من أى استعمال عادى في الحديث للقضية (إذا كان — إذن) . وفضلاً عن ذلك فالتفسير الخاص بدلالة الصدق لقضية (إذا كان — إذن) هو تفسير كاف تماماً في المنطق . وسنرى أن المفارقات الظاهرة إنما تصدر فقط بسبب المعنى الخاص بدلالة الصدق الذى يكون أكثر اتساعاً من المعنى الدارج في المحادثة . ولكونه أكثر اتساعاً فإنه يشتمل عليه أيضاً . بل يصلح هو نفسه للاستخدام العملى . . وهذا يكفى لتسوية غرضنا في إثبات جدة هذا الاستخدام . وسنأخذ بالتالى جدول الصدق السابق على أنه تعريف للطريقة التى يعمل بها الثابت المنطقى (\supset) في حساب القضايا.

٤ — العلاقات بين دوال الصدق :

رأينا إذن أنه من الممكن تعريف الثوابت المنطقية لدالة الاستلزام (\supset) في حدود كل من (\sim) ، (\vee) .

ومن الممكن أيضاً تعريف كل من (\vee) ، (\wedge) في حدود من الثوابت المنطقية الأخرى . غير أن (\sim) لابد أن ينظر إليها كفكرة بدائية نقبلها كشئ لا يمكن تعريفه في حدود أى ثوابت أخرى من هذا القبيل .

(١) المادى هنا معناه الاستلزام الذى ينشأ عن مادة الكلام . ومادة الكلام هي معناه . والمفروض أن يكون الاستلزام المادى هنا هو الاستلزام المعنوى لأنه يعبر عن استلزام معنى لمعنى أو أن أحد المعاني يلزم عنه معنى آخر . (المترجم)

ولكننا قد نأخذ جدول الصدق الخاص بدوال الصدق المذكورة آنفاً بوصفه « تعريفاً » لتلك الدالة وبوصفه قاعدة أيضاً لاستخدام الثابتة المنطقية الواقعة في الدالة .

وعلى ذلك فالجدول التالي :

س	ص	س ب ص
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	٠
٠	٠	١

عبارة عن تعريف لدالة الاستلزام وقاعدة لاستخدام (ب) داخل حساب القضايا .

ولما كان جدول الصدق الخاص بإحدى الدالات المعينة يقوم بمثابة تعريف لتلك الدالة بعينها فأى دالة أخرى ستكون معادلة لها إذا حازت نفس جدول الصدق بل يمكن إحلالها محلها في كل الأغراض والمناسبات المنطقية ، وبهذا رأينا أن (ب س ٧ ص) تكافئ (س ب ص) من حيث حيازتها لنفس جدول الصدق . ومن هنا يمكن النظر إليها كطريقة أخرى لتعريف دالة الاستلزام برغم أن التعريف هنا من نوع آخر بحكم وضعه في حدود ثوابت منطقية أخرى لا في حدود القيم الخاصة بالصدق أو الكذب .

وبالمثل يمكن التعبير عن (س ب ص) في حدود (ب) ، (٠) على

النحو التالي :

[ب (س ٠ ب ص)]

مثال ذلك أن قولنا :

(إذا وضع هذا المعدن فوق النار تمدد)

هو نفس قولنا :

(من الخطأ أن هذا المعدن سيوضع على النار ولا يتمدد)

ويكون جدول الصديق كما يلي :

س	ص	ص	(س ~ ص)
١	١	٠	١
١	٠	١	٠
٠	١	٠	١
٠	٠	١	١

وها هنا يكون العمود الأخير من الجدول هو نفسه العمود الأخير في جدول

(س ~ ص) .

ومن هنا تكون التعبيرات (س ~ ص) ، (س ~ ص) ،

[(س ~ ص)] متكافئة منطقياً ويمكن إحلال بعضها محل بعض إزاء

جميع الأغراض المنطقية المختلفة^(١)

ويمكن تعريف الثابتة المنطقية (~) في حدود (~) ، (~) . وعلى

ذلك يمكن أيضاً تعريفها في حدود (~) ، (~) على النحو التالي . نستخدم

التعبير = ت ت بمعنى تكافئ من حيث التعريف أو تتكافأ تعريفاً مع (~) .

س ~ ص = ت ت ~ (س ~ ص) = ت ت ~ (س ~ ص)

(١) (س ~ ص) تؤدي إلى ثنى كل من (س ~ ص) ، (س ~ ص)

[في آن معاً . وعلى ذلك يمكن كتابتها بطرق أخرى مثل : (س ~ ص) ،

~ (س ~ ص) . وهذه الطريقة أساسية في المنطق الرمزي لأنها تعيننا على

التوسع والتشعب في نهاية الأمر بعد أن تستقر معنا أدوات كتابة معاني الثوابت المختلفة بطرق

عديدة . وهذا هو ما سوف يتضح بعد هذا مباشرة . (المترجم)

فمثلا القضية :

(إنه في آن معاً كسول وغبي)

تعنى تماماً ما تعنيه :

(من الخطأ أنه إما أن يكون غير كسول أو أنه غير غبي)

وتعنى كذلك ما تعنيه :

(من الخطأ أنه إذا كان كسولاً فهو ليس غيباً)

وكذلك الثابتة (V) يمكن بالمثل أن تعرف في حدود (م) ، (٠) وفي

حدود (م) ، (٤) :

س ٧ ص = ت ت م (م س ، م ص) = ت ت م س ٤ ص

وعلى ذلك فالقضية :

(هذا الخطاب إما أنه مزور أو أنه دليل قاطع)

تكافئ منطقياً القضية :

(من الخطأ أن هذا الخطاب في آن واحد ليس مزيفاً وليس دليلاً قاطعاً) .

وتكافئ كذلك القضية :

(إذا لم يكن هذا الخطاب مزيفاً فهو إذن دليل قاطع)

ولتلخيص هذه القضايا نجد أمامنا :

١ - س ٤ ص = ت ت م س ٧ ص = ت ت م (س ، م ص)

٢ - س ٠ ص = ت ت م (م س ٧ ص) = ت ت م

(س ٤ م ص)

٣ - س ٧ ص = ت ت م (م س ، م ص) = ت ت م

س ٤ ص

وينبغي أن نتذكر أن ما نعنيه في كل حالة بقولنا إن هذه التعبيرات

متكافئة منطقياً هو أنها حائزة على عين جدول الصديق . وظهر هذا ما هنا
فما يتعلق بتعادلالات القضية رقم (١) .

ويستطيع القارئ أن يتحقق من التعادلالات الأخرى بواسطة إنشاء جداول
الصديق المناسبة .

٥ - ثوابت منطقية أخرى :

سوف نرى مما سبق قوله بشأن الثوابت المنطقية التي تتحكم في أى متغيرتين
مثل (و) أو (إذا كان - إذن) أنها يتم تعريفها بجدول صديق مميز يحتوى
على أربعة أرقام كل منها صادق أو كاذب أعني أو $O^{(1)}$. وبهذا فجدول
الصديق المميز الخاص بدالة الوصل هو ١٠٠٠ (وذلك إذا سجلنا علامة
الصديق أو الكذب في كل عمود تسجيلاً أفقياً من أجل التسهيل) وجدول
الصديق المميز الخاص بدالة الاستلزام هو ١٠١١ .

وتسمى هذه الأرقام أرقام جدول الصديق أو القالب الرقمى الخاص بدالة
الصديق المعنية . وعلى ذلك فالقالب الرقمى الخاص بدالة الفصل هو ١١١٠ .
وسيكون من الواضح كذلك مما سبق قوله أن أى دالتين تمتلكان نفس القالب
الرقمى Matrix-number مثل (س ت ص) و (س ص) تكونان
متكافئتين وقابلتين لإحلال إحداهما محل الأخرى في الأغراض المنطقية :
وتؤدى إمكانية تمثيل الدوال بالقوالب الرقمية على هذا النحو إلى إثارة المسألة
التالية : كم عدد الدوال المختلفة الممكنة بالنسبة إلى أى متغيرتين ؟

(١) ينبغي أن نتذكر دائماً أن الترقيم ١ يشير إلى T والترقيم صفر أو O وهو الصفر
الأفرنجى الذى استخدمناه في هذا الكتاب للدلالة على قيمة الكذب يشير إلى F . وينشأ
عن نتائج الجداول الخاصة بدوال الصديق أرقام أخيرة من مجموع ١ ، مجموع O : ويكون هذا
الرقم نفسه أيضاً قالباً رقمياً خاصاً بالدوال المختلفة . (المترجم)

أو بعبارة أخرى كم طريقة من الطرق المختلفة يمكن أن تسع الأربع خانات المفروض ملؤها بالأرقام (١ ، ٥) ؟

ومن الواضح أن الإجابة عن ذلك هي كالآتي :

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \text{ أى } 2^4 \text{ أو ما معناه } 16 \text{ طريقة مختلفة .}$$

وقد سبقت الإشارة إلى ثلاث طرق فقط من الدوال البالغ عددها ١٦ .
وأعنى بهذه الطرق الثلاث التي أشرنا إليها : ١٠٠٠ - ١٠١١ - ١١١٥ .

فكم عدد الدوال الأخرى التي نحتاج إليها في العمليات القادمة ؟

والإجابة عن ذلك هو أننا لن نحتاج إليها كلها لأنها ليست جميعها ذات أهمية من الناحية المنطقية وإن كان عدد كبير منها سيكون جديراً بالفحص :
وسوف نستعرض هنا ثلاث طرق أخرى منها .

دالة التكافؤ The Equivalence Function

يقال إن القضيتين تكونان متكافئتين ، أو بمعنى أكثر شيوعاً ، تكونان متكافئتين من حيث المضمون إذا كان لهما عين قيمة الصديق . ومن المناسب أحياناً في حساب القضايا توفير منهج رمزي لتمثيل هذا التكافؤ ، ويعبر عنه عادة بالرمز (\equiv) . وعلى ذلك تكون (س \equiv ص) عبارة صادقة إذا كان لكل من س ، ص نفس قيمة الصديق . وإلا فهي عبارة كاذبة .
ويتكون جدول الصديق إذن على النحو الآتي :

س	ص	س \equiv ص
١	١	١
١	٥	١
٥	١	٥
٥	٥	٥

فالقالب الرقعى الذى يميز دالة التكافؤ هو ١٠٠١ .

وقد لا يوجد تعبير شائع باللغة الإنجليزية يناظر اسم دالة التكافؤ . والطريقة الاصطلاحية الوحيدة للتعبير عن هذه الدالة فى اللغة الإنجليزية هى مجرد استخدام الصيغة (فقط إذا كان - إذن) .

والقضية :

(سوف ينجح فقط إذا كان شديد الاجتهاد)

تكون صادقة إذا كان الحكمان المكونان لها (سوف ينجح) ، (سوف يكون شديد الاجتهاد) كلاهما صادقين أو أيضاً إذا كان كلاهما كاذبين . فتكون هذه القضية كاذبة إذا كان الحكم الأول المكون لها كاذباً والثانى صادقاً أو إذا كان الأول صادقاً والثانى كاذباً .

ويكون لهذه القضية نفس معنى الوصل بين الاستازامين :

(إذا كان شديد الاجتهاد فإذن سوف ينجح) ، (إذا نجح فإذن سوف

يكون شديد الاجتهاد) وبهذا فإن قولنا :

(س \equiv ص)

يعادل دالة الوصل (س \supset ص ، ص \supset س) . وإذا أنشأنا جدول الصدق الخاص بالدالة الأخيرة فسوف نرى أنه هو بعينه جدول الصدق الخاص بقولنا

(س \equiv ص)

س ص س \supset ص ص \supset س س \supset ص ص \supset س

١ ١ ١ ١ ١ ١

٠ ٠ ٠ ١ ١ ٠

٠ ١ ١ ٠ ٠ ١

١ ٠ ١ ١ ٠ ٠

وعلينا أن نلاحظ أننا قد نبليغ نتائج من قبيل المغالطات تماماً كما جرى من قبل في دالة الاستلزام إذا أهملنا معاني القضايا التي نعالجها وقصرنا اهتمامنا فقط على قيم الصدق . فذلك من شأنه أن يصل بنا إلى حالات من المغالطات الخاصة بدالات التكافؤ . ولا غرابة في ذلك إذا راعينا أن التكافؤ يمكن أن يعرف في حدود الوصل الخاص بدالة الاستلزام .

وعلى ذلك فالقضية :

(نيرون كان إمبراطوراً رومانياً)

تعاادل القضية :

(كل إنسان فانٍ)

لأن كلا منهما قضية صادقة .

وكذلك القضية :

(الأرض مسطحة)

تعاادل القضية :

(روسيا غزت ألمانيا عام ١٩٤١)

لأن كلا من القضيتين كاذبة .

والواقع أن أى قضية صادقة تعادل أى قضية أخرى صادقة (أو تعادل نفسها) كما أن أى قضية كاذبة تعادل أى قضية كاذبة أخرى (أو تعادل نفسها) . ومن الشائع أن يترجم التعبير (س \equiv ص) بعبارة (س تكافئ ص) من حيث المعنى (ص) حرصاً على استبعاد الغرابة من استخدام لفظة (التكافؤ) .

ولا حاجة بنا إلى أن تزعمنا غرابة هذا الاستخدام للفظـة التكافؤ لأننا سوف نجد — كما كان الأمر فيما يتعلق بدالة الاستلزام — أن تعريف الدالة على نحو ما يقدمه لنا جدول الصدق يؤدي عمله بشكل كاف تماماً . ولكن لابد أن تكون القواعد المنطقية عامة بشكل تام في تطبيقها ولا تحتاج إلى أن تنحصر في الأفكار المؤداة في اللغة العادية بشرط أن تكون قادرة على تغطية تلك الأفكار .

والواقع أن استخدام (\equiv) التي أجملنا عنها الكلام منذ قليل تغطي بالفعل المعنى العادى لقولنا (فقط إذا كان) ، غير أنها تقوم بتقنين حالات أخرى بالمثل مما لا يكون له فى اللغة العادية أى طريقة تقليدية فى التعبير .

دالة البديل The Alternative Function

سبق أن أشرنا إلى أن لفظة (أو) ذات معنيين ، كما أن الأغراض الخاصة بالثوابت المنطقية الأساسية جعلتنا نختار المعنى الخاص بالامتياز لهذه اللفظة ، أو بعبارة أخرى قبلنا قراءة (س ٧ ص) على أنها تعنى :

(إما س أو ص صادقة ومن الجائز كلاهما)

غير أنه من اليسير تعريف المعنى الآخر الوحيد الانفرادى المقتصر على وجه واحد لللفظة (أو) وإقامة جدول صدق لها فى وضعها المنفرد بهذا الوجه الواحد على أساس الثوابت التى سبق تقديمها . ولنأخذ الرمز (\wedge) على أنه يشير إلى استخدام (أو) بمعنى واحد ، أى بمعنى أنه إما أن تكون س أو ص ولكن ليس كلاهما معاً . وقد سبق أن عابجنا هذا بصدد الكلام عن دالة الفصل . و جدول الصدق الخاص بالمعنى الوحيد الانفرادى لللفظة (أو) الذى أشرنا إليه بالرمز (\wedge) هو كالاتى :

س	ص	س ٧ ص
١	١	٠
١	٠	١
٠	١	١
٠	٠	٠

وهذا هو نفس جدول الصدق الخاص بالعبارة [(س ٧ ص)]

(س ٠ ص)]

وفي إمكان القارئ أن يتحقق بنفسه من ذلك . وعلى ذلك :

$$س \wedge ص = ت \quad ت = [(س \vee ص) \cdot (س \cdot ص)] \quad ت = [(س \vee ص) \cdot (س \cdot ص)]$$

دالة الشطب أو رفض أحد البديلين The Stroke Function :

سبق أن قدمنا الثوابت المنطقية الأساسية التالية (\cdot) ، (\vee) ، (\neg) ، (\equiv) . وقمنا بتعريف كل من (\wedge) ، (\equiv) في حدود هذه الثوابت ، ورأينا كذلك أن (\vee) ، (\cdot) ، (\neg) يمكن تعريفها في حدود بعضها البعض بالاستعانة بالثابتة البدائية (\neg) . وتؤدي حقيقة إمكان تعريف الثوابت المنطقية فيما بين بعضها البعض على ذلك النحو إلى أن نتساءل :

كم عدد الثوابت التي لا غنى عنها فعلا من أجل بناء حساب القضايا^(١) ؟
وقد رأينا من النتائج التي وصلنا إليها من قبل أنه يمكننا الاستغناء عنها جميعاً فيما عدا ثابتين من بينها . ذلك أن (\neg) ، (\cdot) يمكن تعريفها في حدود (\neg) ، (\vee) كما أن (\vee) يمكن تعريفها في حدود (\neg) ، (\cdot) أو بالتبادل في حدود (\neg) ، (\equiv) .

ولكن هل يمكن إنقاص الثوابت أكثر من ذلك عن ذلك العدد ؟
وللإجابة عن ذلك نقول إننا نستطيع أن نستغنى عن كل الثوابت المنطقية فيما عدا إحداها . ولكننا لم نورد من قبل هذه الثابتة .

والدالة التي سنستخدمها هنا من أجل هذا الغرض تعرف باسم دالة الشطب

(١) في مبادئ الرياضيات أو البرنكييا تأليف رسل وهوايتهيد اعتبرت الدالتان (\cdot) ، (\vee) على أنهما بدائيتان أولاً تعريف لهما في النسق . ولهذا اضطرنا إلى تعريفهما بالاستخدام داخل التعريفات الواردة في هذا الكتاب في الفقرة الثانية من الفصل الرابع عند الكلام عن قواعد التحويل . - (المترجم)

أو رفض أحد البديلين ويتم تعريفها على النحو التالي : (س / ص) وتقرأ كما يلي :

(على الأقل واحدة من الاثنتين س ، ص كاذبة)

ويقام جدول الصدق الخاص بها على هذا النحو :

س	ص	س / ص
١ -	١	٠
١	٠	١
٠	١	١
٠	٠	١

ومن الواضح أن هذه الدالة التي تقرأ هكذا (على الأقل إحدى الاثنتين س ، ص كاذبة) تكافئ (س ∨ ص) .
ولننظر الآن كيف يمكن أن نعرف الثوابت المنطقية التي أخذناها كأساس في حدود دالة الشطب .

(أ) س ∨ س = ت ت س / س

لأنه إذا كانت (س) كاذبة أو (س) كاذبة فن الواضح أن (س) كاذبة . وسيؤدي تأمل جداول الصدق إلى توضيح الهوية .

س	س ∨ س
١	٠
٠	١

س	س	س / س
١	١	٠
٠	٠	١

(ب) $س \circ ص = ت ت (س / ص) / (س / ص)$.
 فإذا كانت $(س / س)$ تكافئ $(س - س)$ كانت إذن $(س / ص) /$
 $(س / ص)$ تكافئ $(س / ص)$.
 وكذلك إذا كانت $(س / ص)$ تعنى $(س / ص)$ على الأقل إحدى الاثنتين $س$ ،
 $ص$ كاذبة) .

فإذن $[س - (س / ص)]$ تعنى $(س / ص)$ من الخطأ أن إحدى الاثنتين $س$ ،
 $ص$ على الأقل كاذبة) أو $(س - ص)$ صادلة أى بعبارة أخرى
 $(س \circ ص)$.

(ج) $س \vee ص = ت ت (س / س) / (س / ص)$.
 فما دامت $(س / س)$ تكافئ $(س - س)$ إذن فالنصف الثانى من عبارة
 هذا التعريف يمكن أن يقرأ هكذا $(س - س / ص)$ وهو التعبير الذى
 يعنى أنه $(إما لا - س أو لا - ص كاذبة)$ وهذا يعنى أيضاً $(إما س أو$
 $ص صادلة)$ أى بعبارة أخرى $(س \vee ص)$.

(د) $س \wedge ص = ت ت س / (س / ص)$
 وهنا يكون النصف الثانى من التعريف مكافئاً للعبارة $(س / ص)$
 وهى ما يمكن أن يقرأ على النحو التالى $(إما س كاذبة أو لا - ص كاذبة)$
 أو $(إما س كاذبة أو ص صادلة)$ أى بعبارة أخرى $(س \wedge ص)$ وهو
 نفس ما رأينا من قبل أنه يعنى $(س \wedge ص)$.

وعلى ذلك فمن الواضح أنه يمكن كتابة كل التعبيرات الخاصة بحساب
 القضايا فى حدود المتغيرات الخاصة بالقضايا $س$ ، $ص$ ، $ل$ وثابتة
 منطقية واحدة هى دالة الشطب .

غير أن ما نكسبه بالاعتقاد فى التصورات الأساسية عن طريق استخدام

دالة الشطب كثابتة مفردة تفقده من جانب الوضوح النفسى . ذلك أنه من الواضح أن :

(س س ٠ ص) ص

تكون أكثر وضوحاً للفهم من قولنا :

[(س / س) (ص / ص) / (ص / ص)]

غير أن هذه التعبيرات متكافئة ، كما يمكن أن يتحقق القارئ من ذلك عن طريق تطبيق التعريفات المتقدمة من أجل تحويل كل تعبير إلى سواه أو عن طريق إنشاء جداول الصديق .

الفصل الثالث

حساب القضايا

(يتبع)

١ - منهج جدول الصدق لاختبار صحة البراهين

لقد ذهبنا في استعمال جداول الصدق إلى الحد الذى يبدو ملائماً لشرح فكرة الاعتماد على دالات الصدق . وسوف نتقدم الآن نحو استخدام هذه الجداول فيما سوف يبدو بالنسبة إلى معظم القراء عملياً بدرجة أكبر وبطريقة أبعد على الاهتمام وأعنى به اختبار سلامة وصحة البراهين .

ولكن قبل أن نتمكن من تطبيقها بهذه الطريقة ينبغى علينا اعتبار عدد كبير من قواعد البناء وأصول الإجراء .

وقد أبدينا اهتمامنا إلى حد كبير بدالات بسيطة جداً خاصة بمتغير واحد أو بمتغيرين . ولكن علينا أن نستعد للاشتغال بالبراهين ذات التعقيد الملحوظ التى تتضمن تعبيرات دوال الصدق المتصلة بعدد من المتغيرات .

واكتفينا فى إجرائنا حتى الآن بالتسليم - كما إتضح من الحالات البسيطة - بعدد من القواعد التى كان يلزمنا جعلها ظاهرة ظهوراً تاماً قبل الذهاب إلى حد الانشغال بحالات أشد تعقيداً .

فلننظر أولاً فى مسألة عدد متغيرات القضايا التى تحتوى عليها تعبيرات دالة الصدق . إذ يعنى جدول الصدق الخاص بدالة التناقض التى سبقت الإشارة إليها بقيم الصدق المتعلقة بمتغير واحد للقضايا (س) وتشتمل على صفين

وعמודين . ويستنفد الصفان التأليفات الممكنة للقيم التي يمكن أن تعزى إلى المتغير (س) ونفيه . أما فيما يتعلق بالعمودين فأولهما يحتوى على القيم الممكنة الخاصة بالمتغير (س) والآخر يحتوى على القيم المناظرة لها فيما يخص (لا-س) . وبهذا يكون :

س	ص
١	٠
٠	١

وعندما نلتنف إلى دالة الصدق الخاصة بالمتغيرين س ، ص نجد الوضع أكثر تعقيداً . ولنأخذ كمثال لذلك دالة الفصل :

س	ص	س ٧ ص
١	١	١
١	٠	١
٠	١	١
٠	٠	٠

فها هنا نجد أربعة صفوف أو أسطر وثلاثة أعمدة . وسنرى أن الأربعة الأسطر الخاصة بالعمود المسلسل تحت المتغير (س) تبدأ القيم بالنسبة ١١٠٠ كما أن العمود المسلسل تحت (ص) يبدأ قيم الصدق الخاصة به بالنسبة ١٠١٠ . فقد بدأت كلها إذن بهذه الطريقة بحيث تتوافر لدينا إمكانيات التأليفات الأربع الخاصة بقيم صدق كل من (س) ، (ص) وهي كالآتي :

٠٠ - ٠١ - ١٠ - ١١

وسوف نرى فيما بعد ضرورة وأهمية توافر جميع التأليفات الممكنة لدينا ،

الخاصة بقيم صدق متغيرات القضايا . وبذلك فإن من شأن جدول الصدق الخاص بإحدى المتغيرات أن يحصى قيم صدق المتغير في النسق ١٥ . ويحصر جدول الصدق الخاص بمتغيرتي قيم الصدق الخاصة بالمتغير الأول في النسق ١١٥٥ كما أنه يحصر القيم الخاصة بالمتغير الثاني في النسق ١٥١٥ .

والآن دعنا نفترض أنه يلزمنا إنشاء جدول صدق خاص بتعبير القضية التي تحتوي على ثلاث متغيرات مثل قولنا :

(س ٧ ط) \supset (ص ٧ ط)

وقد وجدنا أن الدالة الخاصة بالمتغير تحتفظ بما يعادل (١٢) أو بإمكانيتي الصدق والكذب وأن دالة المتغيرين تحتفظ بما يعادل (٢٢) أو أربع إمكانيات صدق وكذب .

ويجب أن نعرف الآن كم عدد إمكانيات الصدق والكذب الخاصة بدالة ثلاث متغيرات مثل المتغير السابق .

ومن الواضح أنه سيكون ثمة (٢٢) أو بمعنى أصح ثمانية .

وسبب ذلك هو أن المتغير الثالث يحتفظ بإمكانيتي صدق وكذب وهما (١ ، ٥) ، وكل منهما لا بد أن يتألف مع أربع إمكانيات صدق خاصة بالمتغيرين الأولين . وبذلك سنحتاج إذن إلى ثمانية أسطر في جدول الصدق .

وعلى هذا إذن أن نقرر كيف تنحصر القيم من أجل تغطية كل إمكانيات الصدق الثمان . وسنرى أن النسق التالي سيكون هذا المطلب (برغم أنه ليس بطبيعة الحال النسق الوحيد الممكن) :

س	ص	ط
١	١	١
١	١	٥
١	٥	١
١	٥	٥
٥	١	١
٥	١	٥
٥	٥	١
٥	٥	٥

ويمكننا الآن تلخيص ما قيل سابقاً ونعممه من أجل دالات الصديق الخاصة بأي عدد من المتغيرات في القاعدتين الآتيتين :

١ - تحتاج دالة صديق عدد (ن) من المتغيرات إلى عدد (٢-ن) من السطور لكي تكفي كل إمكانيات صدقها .

٢ - يكون نسق الترتيب في أعمدة قيم الصديق الخاصة بكل واحدة من المتغيرات كالاتي : فحيثما تشير (ن) إلى المجموع الكلي للمتغيرات يكون العمود المسلسل^(١) تحت (م) أي في عمود المتغير « الميمى » على (٢-١) من مجموعات (٢-ن) الخاصة بعلامة الصديق ١ متبوعة بالمجموعة (٢-ن-٢) الخاصة بعلامة الكذب ٥ .

(١) تشير « ن » عادة إلى عدد كل المتغيرات الموجودة في الدالة وتشير « م » إلى ترتيب المتغير المقصود بين المتغيرات المتوالية ويطلق الميمى على المتغير المقصود . أو يمكن أن نقول باستخدام تعبير المستوى ، الذى سيأتى فيما بعد إن « ن » تشير إلى المستوى و « م » أو الترتيب الميمى إلى حد معين داخل المستوى انظر الفقرة (٤) بفصل (٦) (للمترجم) .

ويمكن توضيح هاتين القاعدتين بالأمثلة على النحو الآتى :

الحالة الأولى : نفرض أن لدينا دالة خاصة بمتغيرين . إذن سيتبع ذلك :

أولاً : سيكون ثمة (٢٢) أو أربعة سطور

ثانياً : سيحتوى العمود المسلسل تحت المتغير الأول على (١٢-١) أو (٢ صفر) أى أنه يحتوى على مجموعة واحدة من (٢٢-١) أو عدد (٢) من علامة الصديق ١ متبوعة بنفس العدد من علامة الكذب ٠ فتكون ١١٠٠ .

الحالة الثانية : لنفرض أن لدينا دالة أربع متغيرات إذن سيتبع ذلك .

أولاً : سيكون ثمة ٢٤ أو ١٦ سطراً فى جدول الصديق

ثانياً : إذا أنشأنا العمود المسلسل تحت المتغير الثالث فسيوافر لدينا (٣٢-١) أو أربع مجموعات من (٢٤-٣) أو عدد (٢) من علامات الصديق ١ متبوعة بنفس العدد من علامات الكذب ٠ على النحو الآتى :

١١٠٠ ١١٠٠ ١١٠٠ ١١٠٠

الحالة الثالثة : دعنا نفرض وجود دالة ذات خمس متغيرات . إذن سيتبع ذلك :

أولاً : سيكون ثمة (٥٢) أو ٣٢ سطراً فى جدول الصديق .

ثانياً : إذا أردنا إنشاء العمود المسلسل تحت المتغير الثالث مثلاً فسيكون لدينا (٣٢-١) أو أربع مجموعات من (٥٢-٣) أو أربع علامات صديق ١ متبوعة بنفس العدد من علامات الكذب ٠ على النحو الآتى :

١١١١٠٠٠٠ ١١١١٠٠٠٠ ١١١١٠٠٠٠ ١١١١٠٠٠٠

وسيتضح أن جداول الصديق تصبح رديئة وغير صالحة للاستعمال حينما احتوت تعبيرات دالة الصديق التى نتعامل بها على أكثر من أربع أو خمس متغيرات قضايًا . ولكن لحسن الحظ توجد مناهج أكثر اختصاراً كما سنرى يمكن تطبيقها حينما كانت جداول الصديق سيئة الاستخدام على نحو مناسب .

٢ - التنقيط المنطقي ومجال الثوابت Logical Punctuation

لما كان اعتمادنا على البساطة المقارنة بين التعبيرات وعلى عدد صغير من المتغيرات المتضمنة فقد أمكننا أن نسلم بقواعد معينة خاصة بتجميع التعبيرات المنطقية وبتنقيطها . ويجب إظهار هذه القواعد الآن قبل أن نشرع في التعامل بتعبيرات أكثر تعقيداً .

نخذ مثلاً القضايا التالية :

- (١) من الخطأ أنه طموح ونشط في عمله .
- (٢) إذا كان طموحاً إذن إذا عرضت عليه الوظيفة فسيقبلها .
- (٣) سوف تسقط الوزارة أو ستضطر إلى طرح الثقة والبقاء في الحكم .
- ولنفرض أننا وضعنا هذه العبارات في ترقيم منطقي على التوالى كالآتي :
- (٤) س . ص
- (٥) س ص ل
- (٦) س ٧ ص ل

فلا شك في أننا سنشعر بمدى الغموض في هذه العبارات تَوّاً لأن ترجماتها إلى قضايا رمزية في حساب القضايا غير دقيقة . فنحن لا نعرف بدون رجوع إلى القضية الأصلية رقم (١) ما إذا كانت القضية رقم (٤) تقرأ على النحو التالى : « س كاذبة ، ص صادقة » أو على النحو الآخر : « من الخطأ أن تكون س ، ص صادقتين » . وفضلاً عن ذلك يمكن أن تقرأ القضية رقم (٥) إما على هذا النحو : « إذا كانت س إذن ص إذن تكون ل ، أو على هذا النحو الآخر : « إذا كان - " إذا كانت س تكون إذن ص " - تكون إذن ل ، . وما هنا مرة أخرى لا نعرف بدون رجوع إلى القضية الأصلية رقم (٢) أى القراءتين أصح . وبالمثل يمكن أن تقرأ القضية رقم (٦)

إما على هذا النحو « إما أن تكون س أو ص صادقة وأن تكون ل صادقة »
أو على هذا النحو الآخر : « إما أن تكون س صادقة أو ص ، ل كلتاها
صادق » .

ومن السهل التغلب على مثل هذه الغوامض في كلامنا اليومي الدارج
غير أن اللغة المنطقية التي تتوافر لدينا إلى هذه الدرجة الكبيرة ليست من
الغنى والثراء بحيث توفر لنا أى وسائل لتحاشي تلك الغوامض . ولذلك فعلى أن
نقدم القواعد التي من شأنها أن توفر لنا مثل تلك الوسائل .

ولنذهب إلى تعريف لفظة « المجال » الخاص بالثابتة المنطقية بوصفه جملة
الأجزاء الخاصة بتعبير دالة الصدق الذي تتحكم فيه الثابتة .
وبهذا فالقضية :

(من الخطأ أنه طموح ونشيط في عمله في آن واحد) .
أو القضية :

(إنه ليس طموحاً ونشطاً في عمله في آن معاً) .

[المذكورة أعلاه تحت رقم (١)]

يمكن أن تترجم بالترقيات المنطقية كالآتي :

ب (س . ص)

ويكون « المجال » الخاص بعلامة النفي (ب) شاملاً كل بقية الدالة .

وقارن هذه بقولنا :

(إنه ليس طموحاً ولكنه نشيط في عمله) .

التي نترجمها بالصورة الآتية :

(ب س) . ص

ويقتصر مجال الثابتة (ب) هنا على حرف (س) بحكم وضعها في

داخل القوس .

وفي الوقت الذي تتحكم فيه الثابتة (م) على التعبير الذي يتلوها (أو على جزء من التعبير) وتؤثر فيه بفاعليتها ، نرى الثوابت الأخرى التي قدمناها تؤثر بفاعليتها أو تتحكم في التعبير (أو جزء من التعبير) السابق عليها والآتي بعدها . فمثلا يكون مجال العلامة (V) في قولنا (س ٧ ص) هو كل من س ، ص وفي قولنا (س ٧ ص) يكون المجال الخاص بالعلامة (V) هو كلا من س و (ص ١٠ ل) في حين يكون مجالها في قولنا (س ٧ ص) . ل مقصوراً على س و ص . وتسمى هذه باسم ثوابت ذات حدين .

فعلينا لذلك أن ندخل استعمال الأقواس في الأسلوب الرمزي المتبع في حساب القضايا من أجل إظهار مجال كل ثابتة من ثوابت المنطق المستخدمة في الحالات التي تبدوها تصبح غامضة .

وستكفي القواعد التالية لاستخدام الأقواس كل أغراض هذا الكتاب .

١ - القضية الأساسية الأولى :

يقتصر مجال العلامة (م) على متغيرة القضايا التي تأتي بعدها مباشرة ما عدا حالة واحدة تكون العلامة (م) فيها متبوعة بالقوس الأيمن (ففي هذه الحالة يمتد مجال العلامة (م) إلى القوس الأيسر المقابل له) .

مثال أول :

في قولنا م س . ص يكون مجال (م) هو س

مثال ثان :

في قولنا م س . (ص ٢ ل) ٧ ط يكون

هو التعبير بأكمله .

مثال ثالث :

في قولنا $\text{ـ} (\text{س} . \text{ص}) \vee (\text{ل} \supset \text{ط})$ يكون مجال (ـ) هو $(\text{س} . \text{ص})$.

٢ - القضية الأساسية الثانية

إذا تاخم الثابتة ذات الحدين متغير خاص بالقضايا اقتصر مجال تلك الثابتة في نفس الجانب على متغير القضايا . وإذا تاخم الثابتة ذات الحدين قوس امتد مجال الثابتة إلى القوس « المقابل » له .

مثال أول :

في قولنا $\text{س} \supset (\text{ص} \vee \text{ل})$

يكون مجال الثابتة (\supset) هو التعبير كاملاً من أوله إلى آخره أي يكون هو س وكذلك $(\text{ص} \vee \text{ل})$.

مثال ثان .:

في قولنا $[(\text{س} \supset \text{ص}) \supset \text{ل}] \supset [(\text{ل} \supset \text{ص}) \supset \text{ط}]$

يكون مجال الثابتة الأولى (\supset) هو $\text{س} ، \text{ص} .$ أما مجال الثابتة الثانية (\supset) فهو $(\text{س} \supset \text{ص})$ وكذلك $\text{ل} .$ أما مجال الثابتة الثالثة (\supset) فهو التعبير كاملاً من أوله إلى آخره وهكذا

٣ - إنشاء جداول الصدق وتطبيقها

دعنا نأخذ مثلاً لبرهان بسيط يدخل في مجال حساب القضايا :

إذا كان حسن بريئاً كان إذن بعض الأدلة مزيفاً .

ولكن ليس بعض الأدلة مزيفاً .

إذن ليس حسن بريئاً .

توجد في هذا المثال مقدمتان ونتيجة . والمقدمة الكبرى تحتوي على علاقة استلزام ، والمقدمة الصغرى تحتوي على نفي ما يترتب على المقدمة الكبرى .

ولذلك تحتوي النتيجة على نفي الجملة الأولى في إطار المقدمة الكبرى . وتعمل لفظة (إذن) التي تتقدم النتيجة على إثبات أن المقدمتين معاً تستلزمان النتيجة . أو بعبارة أخرى تدل لفظة (إذن) على أن المقدمتين معاً إذا تقررتا تبعتهما النتيجة . دعنا إذن نضع بدلاً من العبارة (حسن برىء) متغيرة القضايا (س) وبدلاً من العبارة (بعض الأدلة مزيف) متغير القضايا (ص) . فبدالك نستطيع تقديم صورة البرهان المنطقي بالترقيم الخاص بحساب القضايا على النحو التالي :

[(س \supset ص) . (ص \supset س)]

وسنحاول أن نضع جدول الصدق الخاص بهذا التعبير المركب . وسنضع عند بناء جداول الصدق قيم الصدق الخاصة بالمتغيرات في أعمدة منفصلة إلى يمين جدول صدق الدالة المستعملة على نحو ما يتلو :

س	ص	س \supset ص
١	١	١
١	٠	٠
٠	١	١
٠	٠	١

وهذا المنهج هو أوضح ما يلزم العرض الأولى . غير أنه يكون أكثر

لإيجازاً من أجل مواجهة التطبيقات العملية الأكثر ملاءمة إذ وضعناه على النحو التالي :

س	ص	ص
١	١	١
٠	٠	١
١	١	٠
٠	١	٠

بحيث يكتب جدول الصديق الخاص بالتعبير كله الذي يمثل مجال الثابتة المنطقية مباشرة أسفل الثابتة في وضعها الحقيقي بين المتغيرين .

وسوف نراعى هذه الطريقة العملية في كل ما يأتي :

ولنحاول الآن إنشاء جدول تعبير صديق القضايا المشار إليه :

$$[(س \subseteq ص) \cdot (ص \subseteq س)]$$

أولاً : ننشئ أعمدة قيم الصديق الخاصة بمتغيرات القضايا الفردية من اليمين إلى اليسار على النحو التالي :

(١)	(٢)	(٣)	(٤)
$(س \subseteq ص) \cdot (ص \subseteq س)$	$(س \subseteq ص)$	$(ص \subseteq س)$	$س$
١	١	١	١
١	٠	٠	١
٠	١	١	٠
٠	٠	٠	٠

والأرقام الواردة فوق كل متغير في القضايا يعين النسق الذي يجب أن يتبع لإكمال الأعمدة .

بعد ذلك نحاول إنشاء جداول الصديق الخاصة بثوابت المجال الأضيق من اليمين إلى اليسار . (في هذه الحالة تكون الثابتة (٢٢) هي الأولى في حين تتلوها الثابتان الآخران الدالتان على التقي) .

(١)	(٥)	(٢)	(٦)	(٣)	(٧)	(٤)
[(س) ٢٢ ص) . ٢٢ ص]	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢
١	١	١	٠	١	٠	١
١	٠	٠	١	٠	٠	١
٠	١	١	٠	١	١	٠
٠	١	٠	١	٠	١	٠

ثم نحاول بعد ذلك مرة أخرى إنشاء جدول صديق الثوابت الأخيرة الباقية التي تؤدي وظيفتها ابتداء من المجال الأضيق حتى المجال الأوسع . ونجرب قراءة الجدول الأخير على النحو التالي :

(١)	(٥)	(٢)	(٨)	(٦)	(٣)	(٩)	(٧)	(٤)
[(س) ٢٢ ص) . ٢٢ ص]	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢	٢٢
١	١	١	٠	٠	١	١	٠	١
١	٠	٠	٠	١	٠	١	٠	١
٠	١	١	٠	٠	١	١	١	٠
٠	١	٠	١	١	٠	١	١	٠

ذلك أننا نقيم جدول دالة « الوصل » بين (س ٢٢ ص) ، و (٢٢ ص) تحت الرقم (٨) . وفي النهاية نكمل الجدول تحت الرقم (٩) بإنشاء جدول الثابتة الخاصة بأوسع مجال وهي (٢٢) التي تقع بين [(س ٢٢ ص) ، ٢٢ ص] إلى يمينها و (٢٢ ص) إلى يسارها . ولتكوين العمود الخاص بها نطبق القاعدة

على الثابتة (ب) باعتبار العمود رقم (٨) العبارة الأولى السابقة والعمود رقم (٧) كعبارة تالية .

سيلاحظ أن العمود الرئيسى فى جدول الصدق ، وهو العمود المنحدر تحت الثابت ذى المجال الأوسع ، يحتوى فقط على علامات الصدق (١) المكررة وحدها . أو بعبارة أخرى يثبت صدق التعبير بالنسبة إلى كل تأليفات الصدق الممكنة الخاصة بالمتغيرات . ويعنى هذا أن التعبير يكون سليماً منطقياً أو صادقاً صدقاً منطقياً أو مجرد تحصيل حاصل . (وهذه العبارات الثلاثة قد تؤخذ على أنها مترادفة) .

وبذلك يكون لدينا منهج اختبار للسلامة المنطقية للبراهين التى يمكن التعبير عنها بقضايا الاستلزام فى الترتيب المتبع فى حساب القضايا .

فنحن ننشئ جدول الصدق لمثل هذه التعبيرات . . . وإذا جاء العمود الرئيسى أى العمود المنحدر تحت ثابتة المجال الأوسع محتوياً على علامات الصدق (١) المكررة وحدها كان البرهان سليماً منطقياً . ولكن إذا جاءت علامة كذب (٠) واحدة على الأقل فى العمود الرئيسى كان البرهان « غير سليم » منطقياً .

ولنأخذ بدلا من البرهان الذى اتخذناه مثالا فيما تقدم العبارة التالية :

إذا كان حسن بريئاً كان إذن بعض الأدلة مزيفاً

ولكن ليس حسن بريئاً

إذن ليس بعض الأدلة مزيفاً

ودعنا نضع هذا البرهان فى ترتيب حساب القضايا على النحو السابق فسنجد

إذن لدينا : [(س ب ص) . س] (ب ص)

وعلى هذا نعد جدول الصدق الخاص بهذا التعبير فنجد ما يلى :

وعلى ذلك يكون لدينا فى جدول الصدق منهج آلى لتقرير ما إذا كان أى تعبير فى حساب القضايا « صادقاً منطقياً » أو تكراراً بلا فائدة ، أو « تحصيل حاصل » أم لا . ويعنى هذا - إذا كان التعبير صورة البرهان - أننا نملك وسائل تقرير ما إذا كان أى برهان داخل مجال حساب القضايا سليماً منطقياً أم لا .

٤ - المنهج غير المباشر لتقرير جدول الصدق

رأينا أن عدد السطور الضرورية لأى جدول صدق تزداد زيادة هندسية مع زيادة عدد المتغيرات كما رأينا أن هذه النتائج توضع فى شكل تعبيرات من خمسة متغيرات أو أكثر غير صالحة للاستعمال حسب المناهج المذكورة من قبل . . .

ولكن يوجد على أى حال منهج قصير وغير مباشر لاختبار الصحة المنطقية الى تنبنى عليها المبادئ المسيطرة على بناء جداول الصدق . وقد رأينا أن جدول صدق التعبير السليم منطقياً يحتوى فى العمود الهابط تحت الثابتة الرئيسية (أى تحت الثابتة ذات المجال الأوسع) العلامة (١) فقط التى تشير إلى الصدق . فلو أننا افترضنا الآن أن مثل هذا التعبير يمتلك (0) واحدة فى عمود الوسط الخاص بجدوله وقمنا بفحص النتائج المترتبة على هذا الافتراض لرأينا أن هذه النتائج المترتبة عليه غير متألقة مع القواعد الأساسية لبناء جداول الصدق .

انظر فى هذا التعبير :

[(س ١ ص) ٠ ص] ١ ص س

الذى كان بمثابة جدول صدق فيما سبق . واكتب التعبير مع (0) واحدة أسفل الثابتة ذات المجال الأوسع وتقدم للمء قيم الصدق المترتبة على ذلك بما يتفق مع القواعد .

الخطوة الأولى :

$$\begin{array}{r}
 (س \text{ } \text{ } ص) . [ص \text{ } \text{ } س] \\
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & & & 1
 \end{array}
 \end{array}$$

(يقوم السطر الثاني من الأعداد تحت قيم الصديق بتعداد خطوات الإجراء حتى يمكن اختبارها اختباراً نهائياً) .

فنضع (١) تحت الثابتة الرئيسية الخاصة بالجزء الأسبق من العبارة ونضع (0) تحت الثابتة الخاصة بالجزء التالي على نحو ما تتلو هذه النقلة المشروعة الخاصة بالقيم من الادعاء بأن التعبير كله يأخذ القيمة (0)

وإذا تقدمنا على هذ النحو حصلنا على :

الخطوة الثانية :

$$\begin{array}{r}
 (س \text{ } \text{ } ص) ، [ص \text{ } \text{ } س] \\
 \hline
 \begin{array}{ccccc}
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 (1) & & (2) & (1) & (2)
 \end{array}
 \end{array}$$

الخطوة الثالثة :

$$\begin{array}{r}
 (س \text{ } \text{ } ص) . [ص \text{ } \text{ } س] \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 (3) & (1) & & (3) & (2) & (1) & (2)
 \end{array}
 \end{array}$$

الخطوة الرابعة :

[(س ۛ ص) . ۛ ص] ۛ س

1 0 0 0 1 1 0 1 1
(3) (1) (3) (2) (1) (4) (2) (4)

ونقوم في هذه الخطوة الأخيرة بملء القيم الخاصة بكل من (س) ،
(ص) وهي القيم الناجمة عن الخطوات السابقة فنجد لدينا التعبير (س ب ص)
الذى يأخذ القيمة (١) في حين تأخذ (س) نفس القيمة وتأخذ (ص)
القيمة (٥) . وبالإحالة إلى جدول الصديق الذى يصف استخدام دالة الصديق
الخاصة بالعلامة (ب) نجد أن هذا لا يجوز . وبذلك يؤدي فرض وجود (٥)
في العمود الرئيسى في الجدول إلى تناقض فى القواعد الأصلية الخاصة بإنشاء
جدول الصديق . وعلى ذلك لا يمكن أن توجد (٥) فى العمود الرئيسى ، وبذلك
يكون التعبير صحيحاً أو سليماً منطقياً .

وقد يبدو هذا المنهج شبيهاً ببرهان الخلف من بين نماذج الإثبات في الهندسة .
إذ أن النتائج المترتبة على فرض معين تؤدي إلى نهاية غير مقبولة . وبذلك
فالفرض (الذى يزعم فى هذه الحالة أن القيمة (O) داخلية فى العمود الرئيسى)
قد ثبت عدم صحته أى أنه خاطئ .

ولكن من ناحية أخرى إذا كان فرض وجود (O) في العمود الرئيسي في جدول الصديق لا يؤدي إلى أي اعتداء على القواعد الأصلية . . . إذن فالعمود الرئيسي يحتوي فعلاً على (O) ويكون التعبير بالتالي غير صحيح منطقياً .

مثال ذلك :

[(س س س) ص . س س]

1 0 0 0 1 1 1 1 0
(4) (1) (3) (2) (1) (6) (2) (0)

فها هنا تكون تأليفات قيم الصديق متفقة مع القواعد الأصلية الخاصة بمنهج جدول الصديق . وبذلك نفرض وجود (٥) في العمود الرئيسى يؤدي إلى عدم المساس أو الإساءة إلى القواعد الأصلية فيكون التعبير بالتالى غير صحيح منطقياً .

ولإعطاء مثل على المنهج غير المباشر الذى يطبق على التعبير المنطوى على متغيرات عديدة دعنا ننظر فيما يلى :

[(س ص ل) ل] ل [(ل ل س) ل (ط ل س)]

٥ ٥ ١ ٥ ٥ ١ ٥ ٥ ٥ ١ ٥ ٥
(٤) (٧) (١) (٦) (٥) (٢) (٤) (١) (٣) (٢) (٣)

فى هذا المثل يتخذ التعبير (س ص ل) القيمة (٥) فى حين تكون قيمة (س) أيضاً هى (٥) . وهذا مستحيل بحكم جدول الصديق الخاص بدالة التضمين . وعلى ذلك فالتعبير صحيح منطقياً أو سليم منطقياً .

(ملحوظة : لاجابة لتحديد قيمة (ص) لأن النتيجة هى سواء أخذت (ص) القيمة (٥) أو القيمة (١) .

٥ - تصنيف القضايا

يمكن أن يوضع كل تعبير لدوال الصديق فى جدول صديق وأن يصنف فى أحد الأنماط الثلاثة القادمة وفقاً للطابع المميز لجدول الصديق الخاص به ، أو بتعبير أدق وفقاً لطابع القالب الرسمى المميز له . فإذا كان القالب الرسمى أى التابع العددي فى العمود الرئيسى يحدد جدول الصديق محتوياً فقط على القيمة (١) المتكررة كان التعبير سليماً منطقياً أو صادقاً صادقاً منطقياً أو تحصيل

حاصل . (وسننظر إلى هذه الحدود بوصفها مترادفة في هذا السياق) أما إذا احتوى القالب الرقعى على القيمة (0) فقط كان التعبير كاذباً من وجهة النظر المنطقية أو متناقضاً أو غير صحيح منطقياً . ولكن إذا احتوى العمود الرئيسى - كما هو الحال في معظم التعبيرات - على كل من (1) ، (0) كان التعبير احتمالياً بحيث يتوقف الصدق أو الكذب على تأليفة خاصة من قيم صدق المتغيرات فيكون صادقاً بالنسبة إلى بعض إمكانات الصدق وكاذباً بالنسبة إلى بعضها الآخر .

مثال ذلك :

١ - (س ب ص) \equiv (ص ب س)

١ ٠ ١ ١ ٠ ١ ١ ١ ١

١ ٠ ٠ ٠ ١ ١ ٠ ٠ ١

٠ ١ ١ ١ ٠ ١ ١ ١ ٠

٠ ١ ١ ٠ ١ ١ ٠ ١ ٠

ب - (س ب ص) . (س ب ص)

١ ٠ ٠ ١ ٠ ١ ١ ١

٠ ١ ١ ١ ٠ ٠ ٠ ١

١ ٠ ٠ ٠ ٠ ١ ١ ٠

٠ ١ ٠ ٠ ٠ ٠ ١ ٠

ج - (س □ ص □ □ (ص ٧ ل)

١	١	١	١	١	١	١	١
٠	١	١	١	١	١	١	١
١	١	٠	١	٠	٠	٠	١
٠	٠	٠	١	٠	٠	٠	١
١	١	١	١	١	١	١	٠
٠	١	١	١	١	١	١	٠
١	١	٠	١	٠	١	٠	٠
٠	٠	٠	٠	٠	٠	١	٠

وسوف نرى أن (أ) من تعبيرات الجداول السابقة يعد تعبيراً صادقاً ، ويعد (ب) تعبيراً كاذباً ، في حين يعد (ج) تعبيراً محتملاً . وفي الحالة (ج) تبرز قيمة الصديق (٠) كمقابل في المرة الوحيدة التي اتخذت فيها كل من س ، ص ، ل القيمة (٠) .

وينشأ عن هذا التصنيف نقطتان هامتان :

- ٢ - كل تعبير كاذب أو غير صحيح منطقياً يكون نقياً لتعبير صادق منطقياً أو تحصيل حاصل والعكس بالعكس .
- ٢ - كل تعبير صادق منطقياً يكون متكافئاً مع أى تعبير آخر صادق منطقياً . وبالمثل كل تعبير يتعارض مع الصحة منطقياً يكون متكافئاً مع أى تعبير آخر غير صحيح منطقياً .

٦ - الصيغ الأساسية للاستدلال

سيكون من المفيد أن نضع هنا قائمة أساسية مكونة من أهم التعبيرات الصادقة منطقياً .

ص أرقم ١ : ب (س ب س)

هذا هو قانون عدم التناقض^(١) الخاص بالمنطق التقليدي مطبقاً على القضايا. ويقرر هذا القانون أنه لا توجد قضية صادقة وكاذبة في آن واحد .

ص أرقم ٢ : (س ٧ ب س)

وهذا هو قانون الثالث المرفوع الخاص بالمنطق التقليدي بعد تطبيقه على القضايا . ويقرر هذا القانون أن كل قضية يجب أن تكون إما صادقة أو كاذبة :

ص أرقم ٣ : (س ب س)

وهذا هو قانون الهوية في المنطق التقليدي مطبقاً على القضايا . وهو يقرر أن كل قضية تستلزم ذاتها . وسوف نرى أن هذه القوانين الثلاثة الموضوعة في الصيغ الأساسية الثلاث السابقة يمكن تحويل أحدها إلى الآخر بتطبيق القواعد المذكورة آنفاً في الفقره (٤) بشأن ترجمة إحدى الثوابت الزوجية إلى (ب) بالإضافة إلى إحدى الثوابت الزوجية الأخرى .

ص أرقم ٤ : (س ٠ ص) ب س

ص أرقم ٥ : (س ٠ ص) ب ص

وكلاهما ينص على أن الوصل يستلزم واحدة من القضيتين الموصولتين .

ص أرقم ٦ : س ب (س ٧ ص)

(١) يعد إرجاع هذه التسميات إلى صيغ القضايا من الأقوال غير السليمة إطلاقاً . ولكن بعض كتب المنطق الرمزي لم ترفض ذلك نهائياً .

إذا كانت القضية صادقة كان أى « فصل » مشترك فيه تلك القضية صادقا .

ص أرقم ٧ : $\sim \sim \equiv \sim$ س

تؤدى مضاعفة علامة النفي إلى تعطيل النفي . أو بعبارة أخرى يكون إنكار قضية منفية مكافئاً لتأكيد صدق القضية .

ص أرقم ٨ : $(\sim \sim \equiv \sim)$ (ص ٠ س) .

ص أرقم ٩ : $(\sim \sim \equiv \sim)$ (ص ٧ س) ..

الصيغتان الأخيرتان هما بمثابة قانونين تبديلين للوصل والفصل على التوالى . فإنهما يعبران عن حقيقة أن نظام الدوال المكونة لمجال كل من (٠) ، (٧) هو نظام لا يمثل أى مضمون مادى . ونلاحظ أن قانون التبديل لا ينطبق بمجال على الثابتة (\sim) .

ص أرقم ١٠ : $[(\sim \sim \equiv \sim)]$ (ص ٠ ل)

ص أرقم ١١ : $[(\sim \sim \equiv \sim)]$ (ص ٧ ل)

الصيغتان المذكورتان هنا هما قانونا الترابط لكل من الوصل والفصل على التوالى . وهما يعبران عن حقيقة أن جميع التعبيرات التى تحتوى على (٠) فقط كدالة (أو على (٧) ككتابة) لا يمثل أى مضمون مادى بالنسبة إلى سلامة التعبير المنطقية . ونلاحظ أيضاً أن قانون الترابط لا ينطبق على الثابتة (\sim) .

ص أرقم ١٢ : $[(\sim \sim \equiv \sim)]$ (ص ٠ ل)

ص أرقم ١٣ : $[(\sim \sim \equiv \sim)]$ (ص ٧ ل)

وهذان القانونان هما قانونا التوزيع للوصل والفصل . وأولهما له مماثل فى الحساب والجبر إذا قرأنا علامة الضرب (\times) على أنها (٠) وعلامة الجمع (+) على أنها (٧) . ومن الصحيح دائماً إذا كانت أ ، ب ، ج أعداداً كانت $[أ \times ب]$

ص أرقم ١٥ : (س V ص) \equiv (س ١ ص) .

تعرف هاتان الصيغتان باسم قاعدتي مورجان لدى رجال المنطق والرياضيات
الإنجليز. وبرغم أن أوجسطس مورجان لم يكن أول المناطقة الذين اكتشفوا
هاتين القاعدتين اللتين كانتا معروفتين في العصور الوسطى فإنه كان أول من لفت
النظر إلى أهميتهما .

وسنرى باختبار هاتين القاعدتين كما وردتا هنا أنه توجد علاقة هامة بين الوصل والفصل . ويمكن التعبير عن أى عبارة يوجد فيها فصل بعبارة وصل إذا نفينا كلا التعبيرين المكونين للفصل والفصل ذاته أيضاً . وبالمثل يمكن التعبير دائماً عن أى وصل بالفصل إذا نفينا كلا التعبيرين المكونين للوصل والوصل ذاته أيضاً . وتعرف هذه العلاقة الهامة باسم ثنائية الوصل والفصل . وهى علاقة ذات فائدة كبيرة فى العمليات المنطقية .

وهذا هو قانون المتقابلات Contraposition . وهو يقرر إمكان استبدال العبارة المكونة الأولى بالعبارة المكونة التالية والعكس بالعكس على شرط نفي كل منهما .

وهذا هو تعريف الاستلزام المادى أو الموضوعى الذى صادفتاه فى هذا الكتاب من قبل .

ص أ رقم ١٨ : (س ب ص) ≡ (س . ص)

يمكن أن يتحول هذا التعبير إلى صيغة أساسية من نوع رقم ١٧ السابقة عن طريق تطبيق الصيغتين الأساسيتين رقم ٧ ورقم ١٤ على العبارة اليسرى من قضية التعادل الحالية رقم ١٨ . وهذا تعريف آخر للاستلزام المادى أو الموضوعى .

ص أ رقم ١٩ : [(س ب ص) . (ص ب ل)] (س ب ل)

وهذا هو قانون التعدى للاستلزام . وهو يقرر أنه إذا استلزم تعبير تعبيراً آخر واستلزم التعبير الآخر تعبيراً ثالثاً كان التعبير الأول يستلزم الثالث

ص أ رقم ٢٠ : [(س ب ص) . س] ب ص

وتعرف هذه باسم قاعدة الفصائل أو Detachment (Ponendo-Ponens) وهي تقرر أن العبارة المكونة الأولى في الاستلزام تثبت في وقت واحد مع الاستلزام وبالتالي تتبعها العبارة المكونة التالية في الاستلزام .

٧ - إجراءات الاستدلال القاطع والأشكال العادية : Decision Procedures

من أهم مشاكل المنطق مشكلة إيجاد منهج يعيننا على اكتشاف ما إذا كان أى تعبير تحصيل حاصل أم لا . وقد شرحنا منهج جداول الصدق وهو أحد المناهج التى تقوم بهذا الدور وتتوافر لدينا فى حساب القضايا . وهذه المناهج هى التى نسميها باسم « إجراءات الاستدلال القاطع » أو إجراءات القطع بحكم معاونتها لنا على « القطع » بأن التعبير تحصيل حاصل أم لا .

وقد رأينا أن منهج جداول الصدق يصبح أحياناً غير عملى عندما يزيد عدد متغيرات القضايا زيادة كبيرة فى التعبير الذى ننظر فى صدقه المنطقى .

وهناك أيضاً إجراء قاطع آخر أكثر ملاءمة فى بعض الأحيان من منهج

بجول الصدق . ويعرف هذا الإجراء القاطع باسم منهج التحويل أو الرد إلى الصورة « العادية » أو « المقبولة »^(١) canonical form .

ورأينا من قبل أن أى ثابتة منطقية فى حساب القضايا يمكن التعبير عنها فى حدود الثوابت الأخرى . فمثلا يمكن ترجمة التعبير الذى يحتوى على الثابت (٠) ، (١) إلى تعبير متكافئ يحتوى على (١) ، (٠) فقط كثوابت .

وبذلك كان التعبير

$$[(\text{س} \rightarrow \text{ص}) \rightarrow (\text{ص} \rightarrow \text{ل})] \rightarrow (\text{س} \rightarrow \text{ل})$$

متكافئاً مع التعبير

$$\text{س} \rightarrow [\text{س} \rightarrow (\text{ص} \rightarrow \text{ل})] \rightarrow (\text{ص} \rightarrow \text{ل})$$

بواسطة تطبيق ص أرقام ١٤ ، ١٧ السابقتين .

ويصبح من الممكن إذا استخدمنا التعبيرات المتكافئة على هذا النحو تحويل أى تعبير إلى تعبير آخر يحتوى على وصل لدالات الفصل من الشكل الآتى :

$$(\text{س} \rightarrow \text{ص} \rightarrow \text{ل}) \rightarrow (\text{ص} \rightarrow \text{ل} \rightarrow \text{ص}) \rightarrow (\text{س} \rightarrow \text{ص} \rightarrow \text{ل})$$

فشل هذا التعبير يعرف « كشكل عادى للوصل » .

دعنا ننظر فى الأمثلة الآتية للتعبيرات التى تتحول إلى شكل عادى للوصل .

$$أ - [(\text{س} \rightarrow \text{ص}) \rightarrow (\text{ص} \rightarrow \text{ل})] \rightarrow (\text{س} \rightarrow \text{ل})$$

(١) يعرف دارسو المنطق الأرسطى عمليات الرد أو التحويل فى صياغة القضية بأسلوب آخر يغير من شكل القضية ولكن يبقى على نفس المعنى بلا أدنى تغيير كما هو الحال فى العكس المستوى فى الاستدلال المباشر كأن نقول : (لا إله فان) أو (لا فانى إله) (المترجم) .

$\bar{\bar{V}} [(\bar{V} \text{ ص}) \cdot \bar{V} \text{ ص}] \bar{V} \text{ ص} \text{ (حسب ص أ ١٧)}$
 $\bar{\bar{V}} (\bar{V} \text{ ص}) \bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص} \text{ (حسب ص أ ٧ ، ١٤)}$
 $(\text{س} \cdot \bar{V} \text{ ص}) \bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص} \text{ (حسب ص أ ٧ ، ١٥)}$
 $(\bar{V} \text{ ص}) \cdot (\bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص}) \bar{V} \text{ ص} \text{ (حسب ص أ ٩ ، ١٣)}$
 $(\bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص}) \cdot (\bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص}) \text{ حسب ص أ ٩ ، ١٣}$

$\bar{\bar{V}} [(\text{س} \bar{V} \text{ ص}) \cdot (\bar{V} \text{ ص})] \bar{V} \text{ ص} \text{ (س} \bar{V} \text{ ل)}$

أولاً : نحول التعبير (حسب ص أ ١٧) إلى الشكل الآتي :

$\bar{\bar{V}} [(\bar{V} \text{ ص}) \cdot (\bar{V} \text{ ص})] \bar{V} \text{ ص} \text{ (س} \bar{V} \text{ ل)}$
 وإذا طبقنا قاعدة مورجان (وأسقطنا النفي المزدوج حسب ص أ ٧) توافر لدينا :
 $\bar{\bar{V}} (\bar{V} \text{ ص}) \bar{V} \text{ ص} (\bar{V} \text{ ص}) \bar{V} \text{ ص} \text{ (س} \bar{V} \text{ ل)}$

وتؤدي إعادة تطبيق القاعدة إلى :

$(\text{س} \cdot \bar{V} \text{ ص}) \bar{V} \text{ ص} (\bar{V} \text{ ص}) \bar{V} \text{ ص} \text{ (س} \bar{V} \text{ ل)}$

وبتطبيق قوانين التوزيع على طرفي الفصل الأولين نحصل على :

$(\bar{V} \text{ ص}) \cdot (\bar{V} \text{ ص}) \cdot (\bar{V} \text{ ص}) \cdot (\bar{V} \text{ ص}) \cdot (\bar{V} \text{ ص}) \bar{V} \text{ ص} \text{ (س} \bar{V} \text{ ل)}$
 $(\bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص}) \bar{V} \text{ ص} \text{ (س} \bar{V} \text{ ل)}$

وفي النهاية إذا طبقنا قانون التبديل (ص أ ٩) أمكننا وضع الحد الثاني من دالة الفصل في أول التعبير ثم نطبق (ص أ ١٣) ونحصل على ما يلي :

$(\bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص}) \cdot (\bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص}) \bar{V} \text{ ص} \text{ (س} \bar{V} \text{ ل)}$

$(\bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص}) \cdot (\bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص} \bar{V} \text{ ص}) \bar{V} \text{ ص} \text{ (س} \bar{V} \text{ ل)}$

وبهذا يصبح التعبير الآن في الشكل العادي للوصل الخاص به :

جـ - [(س \bar{V} ص) \cdot (س \bar{V} ص)] \bar{V} ص

أولاً : نطبق (ص ١٧١) من أجل تحويل ثوابت الاستلزام إلى علامات نفى
وفصل :

ـ [(ـ س ص) ٠ ـ س] ـ ص

ثم نطبق قاعدة مورجان لتحويل علامة الوصل بنفس الطريقة :

ـ ـ [(ـ س ص) ٠ ـ س] ـ ص

ثم نسقط بعد ذلك النفي المزدوج بواسطة (ص أ ٧) ونستخدم قانون الترابط
(ص أ ١١) لتجميع التعبير كالآتي :

ـ (ـ س ص) ٠ (س ص)

ثم نطبق (ص أ ٧) وقاعدة مورجان لتحقيق ما يلي :

(س ٠ ـ ص) ٠ (س ص)

وفي النهاية نقوم بوصل نظام عناصر الفصل الرئيسى عن طريق قانون التبديل
وعن طريق استعمال قانون التوزيع (ص أ ١٣) من أجل الحصول على ما يلي :

(س ص) ٠ (س ص) ٠ (س ص)

وحينئذ يصبح التعبير في شكل الوصل العادى .

فإذا قمنا بفحص أشكال الوصل العادية المحققة في هذه التداولات والعمليات
أمكننا أن نثبت أن كل طرف من طرفي الوصل في المثليين (ا ، ب) يحتوى على
متغيرة قضايا ونفيها متصلين بواسطة (٧) . فمثلا نرى أن طرفي الوصل الأول (ا)
يحتوى في شكله العادى على (س) و (ـ س) برصدين بواسطة (٧) كما أن
الطرف الثانى للوصل يحتوى على (ص) و (ـ ص) موصولتين بنفس
الطريقة . ويعد هذا الفصل الخاص بمتغير القضية ونفيه تحصيل حاصل .
(انظر أعلاه ص ٢١) . وأكثر من ذلك أن مثل هذا التعبير يظل صادقا صدقا
منطقيا إذا أضفنا إليه عن طريق الفصل أى عدد من متغيرات القضايا مهما
تكن قيم الصديق الخاصة بها . أو بعبارة أخرى ما دامت (س ص) تحصيل

حاصل فكذلك تكون (س ص ص) وكذلك تكون أيضاً (س ص ص) (ص ص ص ص)

ومن الواضح إذا شئنا تقديم مثال ملموس أنه ما دام قولنا
(إما أن السماء تمطر أو أنها لا تمطر)

صادقاً منطقياً فكذلك الأمر فيما يتعلق بقولنا

(إما أن السماء تمطر أو أنها لا تمطر أو أن $2 \times 2 = 5$)

فإذا فحصنا الأمثلة الثلاثة المتقدمة في أشكالها الوصلية العادية :

(أ) (س ص ص ص) ، (س ص ص ص ص) ،

(ب) (س ص ص ص ص) ، (س ص ص ص ص) ،

(س ص ص ص ص) ، (س ص ص ص ص) ،

(ج) (س ص ص ص ص) ، (س ص ص ص ص) ،

فسنرى أن كل عنصر من عناصر الوصل يكون في الحالتين الأوليين (أ ، ب)
صادقاً منطقياً . وذلك لأن كل عنصر منهما يحتوى على متغير قضائي وعلى نفيه
كعناصر للفصل .

مثال ذلك أن طرف الوصل الأول في (أ) يحتوى على (س ص ص) ويحتوى طرف الوصل الثاني في (ب) على (س ص ص) . إذن فكل عنصر من
عناصر الوصل صادق منطقياً وبالتالي يكون التعبير بأكمله في كل حالة صادقاً
منطقياً . أما في الحالة (ج) فلا يتوافر هذا الشرط . وبالتالي تصبح (ج) غير
صادقة منطقياً .

ويمكننا تلخيص الموضوع على النحو التالي :

(١) (س ص ص) صادقة منطقياً

(٢) إذا كانت (س) صادقة منطقياً إذن (س ص ص) ^١ صادقة منطقياً .

(١) نحن نضع ص هنا للإشارة إلى ما هو مكتوب بالحروف الكبيرة أو ما نسميه بحروف
التاج في اللغة العربية وستبع هذه العادة دائماً بوضع العلامة « ٨ » فوق الحرف إذا كان
بالحرف الكايتال في الأصل .

(٣) إذا كان كل من $\text{ص}^{\text{ا}}$ ، $\text{ص}^{\text{ا}}$ صادقين منطقياً كان ($\text{ص}^{\text{ا}}$. $\text{ص}^{\text{ا}}$) صادقا .

(هنا نأخذ الحروف الكبيرة الكابيتال ($\text{ص}^{\text{ا}}$) ، ($\text{ص}^{\text{ا}}$) لتقوم مقام أى متغير قضوى منى كان أو غير منى أو أى تعبير خاص بالصدق القضوى مركب من المتغيرات القضوية) .

٨ - المجموع الكلى لتعبيرات الصدق القضوى :

شاهد مما تقدم أننا عندما نعمل إلى تقويم تعبير صدق الدالة عن طريق إقامة جدول الصدق الخاص به نكون بذلك بصدد تحديد قالبه الرقمى المميز له .

وعلى ذلك فالقالب الرقمى الخاص بقولنا ($\text{ص}^{\text{ا}}$ $\text{ص}^{\text{ا}}$) وهو ١١١٥ والقالب الرقمى الخاص بقولنا :

[$\text{ص}^{\text{ا}}$. ($\text{ص}^{\text{ا}}$ ل)] هو ١١١٥٥٥٥٥ .

ورأينا أيضاً أن أى تعبيرين أو أكثر من التعبيرات المتكافئة منطقياً يملكان عين القالب الرقمى وبخاصة أن كل التعبيرات تحصيل الحاصل يكون قالبها الرقمى ١١١١ فى حالة الدالات ذات المتغيرين ويكون قالبها الرقمى ١١١١١١١١ للدالات ذات الثلاثة متغيرات وهكذا . ولنفرض الآن أننا نسأل هذا السؤال :

— كم عدد دالات الصدق غير المتكافئة الموجودة فى حساب القضايا ؟

ومن الواضح أن الرد على هذا السؤال سوف يعتمد على عدد المتغيرات القضوية التى نسمح بوجودها فى الحساب . أما فيما يتعلق بأى رقم مقرر من

المتغيرات فالأمر سهل للغاية . وذلك لأن عدد تعبيرات دوال الصديق غير المتكافئة سيكون هو عدد القوالب الرقمية المختلفة .

وبهذا فعندما نصرف اهتمامنا إلى متغيرة قضوية واحدة فقط سيكون لدينا أربعة قوالب رقمية ممكنة : ١١ - ١٥ - ٥١ - ٥٥ وتلك هي الأرقام الخاصة بكل من المتغيرات التالية :

— س ٧ — س

— س

— س — س

— س ٠ — س

وقد رأينا من قبل أننا نحتاج إلى قالب رقمي من أربعة أرقام من أجل تعبيرات دوال الصديق ذات المتغيرين . وعلى ذلك فيصبح عدد التعبيرات غير المتكافئة التي تحتوي على س ، ص هو نفس الطرق التي يمكن أن تملأ أربعة أماكن إما بإحدى العلامتين (٥) أو (١) أو بكليهما معاً . ومن الواضح أنها ستصير ^٤ ٢ أو ١٦ طريقة ما دامت هناك طريقتان لملء المكان الأول وطريقتان لملء المكان الثاني على أن تتألف كل منها مع الطريقتين الأوليين لملء المكان الأول وهكذا إلى آخره . .

وإذا تقدمنا على نفس هذا المنوال وجدنا أنه إذا توافرت ثلاثة متغيرات س ، ص ، ل فستوجد لدينا ^٨ ٢ أي ٢٥٦ تعبيراً ممكناً من التعبيرات غير المتكافئة . وإذا توافرت لدينا أربعة متغيرات فستوجد لدينا ^{١٦} ٢ أي ما يعادل ٦٥,٥٣٦ . وإذا حاولنا أن نفحص الصيغة العامة المتعلقة بصدد (ب) من المتغيرات لنرى ما سوف تقول إليه نجد أن قوى ٢ في كل من ^٢ ٢ ، ^٤ ٢ ، ^٨ ٢ ، ^{١٦} ٢ المستعملة عاليه هي نفسها القوى المتوالية العددية الخاصة

بالعدد (٢) مثل ١٢ ، ٢٢ ، ٣٢ وهكذا إلى آخره . وعلى ذلك فالعدد الخاص بتعبيرات دوال الصدق غير المتكافئة في حساب القضايا يمكن أن تتمثل على النحو الآتي :

يوجد عدد ${}^1 22$ أو ${}^2 22$ أو ٤ من الدوال غير المتكافئة لكل متغير واحد .

يوجد عدد ${}^3 22$ أو ${}^4 22$ أو ١٦ من الدوال غير المتكافئة لكل متغيرين .

يوجد عدد ${}^5 22$ أو ${}^8 22$ أو ٣٢ من الدوال غير المتكافئة لكل ثلاثة متغيرات .

وبعامة سيوجد عدد ${}^n 22$ من الدوال غير المتكافئة في (ن) من المتغيرات .

٩ - الاشتقاق الاستبدالي :

يتلخص منهج جداول الصدق ومنهج الأشكال العادية في إجراءات الاستبدال القاطع التي يمكن أن تطبق على صيغ معينة كمحك لصحتها المنطقية . فهذه المناهج من شأنها أن تفيدنا بصدد أية صيغة عما إذا كانت تحصيل حاصل أم لا . ولكن يوجد منهج آخر يمكن أن نكشف عن طريقه كيف تتبع إحدى النتائج مقدماتها وكيف تكون لذلك صيغة معينة من الشكل الآتي :

$$١ - (س١ : س٢ . س٣ س٨) \vdash ص٨$$

صيغة منطقياً . وهذا هو منهج اشتقاق النتيجة من المقدمات عن طريق استخدام الصيغ السابق اعتماد صحتها المنطقية .

(من أهم هذه الصيغ ما سبق أن قررناه في الفقرة السادسة كصيغ أساسية . وتسمى هذه الصيغ في بعض الأحيان عن طريق الخطأ بالقوانين المنطقية) . على أن منهج الاشتقاق الاستبدالي كما سنشرحه فيما يلي ليس إجراء استدلال

قاطع . وذلك لأنه لن يعيننا على اكتشاف ما إذا كانت أى صيغة من الصيغ صحيحة منطقيًا أم لا . كل ما فى الأمر هو أنه سيعمد إلى معاونتنا على إظهار ما إذا كان يمكن اشتقاق إحدى الصيغ من عدد من المقدمات إذا كانت هى فى الواقع قابلة لأن تشتق منها . وبهذا فهى توفر لنا منهجاً مفيداً لاختبار صحة البراهين .

وعلىنا أن نقرر فى استخدام هذا المنهج أنه إذا كان من الممكن الحصول على إحدى الصيغ من صيغة أخرى بواسطة استبدال الصيغ المعروفة بأنها متكافئة فيما بين بعضها وبعض فلا بد أن تكون الصيغة الأصلية متكافئة مع الصيغة المشتقة بالاستبدال .

مثال ذلك :

(٢) س . (ص ٧ ل)

معروفة بأنها متكافئة وفقاً للصيغة الأصلية رقم ١٢ مع :

(٣) (س . ص) ٧ (س . ل)

فعلىنا إذاً أن نكتب رقم (٣) حيثما وجدنا رقم (٢) والعكس بالعكس .

وسوف نجد تسويغ ذلك فيما بعد . أما الآن فسوف نأخذ به بغير إثبات .

وعلى ذلك فأى تعبير من الشكل :

$$(٤) (س \supset ص) \equiv (ل \supset ط)$$

ونحن نعرف من الصيغ الأساسية مثلاً أن (ص \equiv م)

$$\text{وأن } (ل \equiv هـ)$$

يكون فى إمكاننا بالتالى أن نكتب المثل رقم (٤) كالتالى :

$$(٥) (س \supset م) \equiv (ل \supset هـ)$$

وبذلك سوف نقرر أكبر من هذا أنه وفقاً للصيغ الأصلية رقم ١٩ ، ٢٠ يكون :

أولاً : إذا وجدت لدينا تعبيرات شرطية من الشكل (س^٨ ٥ ص^٨)
والشكل (ص^٨ ٥ ل^٨) يمكننا بالتالى أن نؤكد الشرطية الثالثة (س^٨ ٥ ل^٨)
ثانياً : إذا كان لدينا شرطية مثل (س^٨ ٥ ص^٨) ومقدمة أولى مثل
(س^٨) يمكننا أن نؤكد العبارة التالية (ص^٨) . ويمكن تسويغ هذه التأكيدات
ولكنها من الواضح بحيث يمكن تأكيدها هنا بغير إثبات .

ودعنا ننظر الآن فى النماذج التالية :

(٦) إذا غادر « أ » المدينة فمن الخطأ إذن أنه برىء وفى أمان من القبض
عليه فى آن معاً . فإذا كان ينزل فى رأيه على حكم قرائه فهو إذن برىء .
وإذا كان بريئاً فهو إذن فى أمان من القبض عليه . وسينزل فى رأيه لحكم
قرائه . إذن فسوف لا يغادر « أ » المدينة .

ولنحاول الآن وضع العبارات الواردة فى (٦) بالرموز على النحو الآتى :

ا = ا سوف يغادر المدينة

ى = ا برىء

س = ا فى أمان من القبض عليه

ب = ا سوف يدعى فى رأيه لحكم قرائه

وبالتالى نحاول تمثيل المقدمات الأربع والخاتمة كالاتى :

(١) ا ٥ ب (ى . س)

(٢) ب ٥ ى

(٣) ى ٥ س

(٤) ب .

إذن : ب ا

ويمكن اشتقاق الخاتمة بالاستبدال كالاتي :

- (٥) (ى . س) ب ا (من (١) باستخدام ص أ ٧ ، ١٦)
 (٦) ي (من (٢) ، (٤) باستخدام ص أ ٢٠)
 (٧) س (من (٣) ، (٦) باستخدام ص أ ٢٠)
 (٨) ب ا (من (٦) ، (٧) ، (٥) باستخدام ص أ ٢٠)

(٧) إذا انخفض سعر أسهم الذهب أو أخفقت عمليات المزاومة فلا بد أن يفلس خليل أو أن يتشحر. فإذا أخفقت عمليات المزاومة أو أفلس خليل فسيكون هناك إذن محاكمة . ولن تجرى محاكمة . وسينخفض سعر أسهم الذهب . إذن فسوف يتشحر خليل .

وسنضع العبارات الخاصة برقم (٧) في رموز كما فعلنا من قبل على النحو التالي :

ج = سينخفض سعر أسهم الذهب .

ف = ستخفق عمليات المزاومة

ع = سوف يفلس خليل

س = سوف يتشحر خليل

د = سوف تجرى محاكمة .

ويمكن أن يوضع البرهان كالاتي :

(١) (ج ٧ ف) ب (ع ٧ س)

(٢) (ف ٧ ع) ب د

(٣) ب د

(٤) ج

إذن : س

- (٥) ب د ب (ف v ع) (من (٢) بواسطة ص ١٦١)
 (٦) ب (ف v ع) (من (٥) ، (٣) بواسطة ص ٢٠١)
 (٧) ب ف . ب ع (من (٦) بواسطة ص ١٤١)
 (٨) ب (ج v ف) v (ع v س) (من (١) بواسطة ص ١٧١)
 (٩) (ب ج . ب ف) v (ع v س) (من (٨) بواسطة ص ١٤١)
 (١٠) (ع v س v ج) . (ع v س v ف) (من (٩) بواسطة ص ١٣١)
 (١١) (ع v ب ج v س) (من (١٠) بواسطة ص ١٤١ ، ٩)
 (١٢) ب (ع v ج) ب س (من (١١) بواسطة ص ١٧١)
 (١٣) (ب ع . ج) ب س (من (١٢) بواسطة ص ١٤١)
 (١٤) س (من (٧) ، (٤) ، (٨) بواسطة ص ٢٠١)

(٨) من الخطأ أن هروب ا يستلزم أن يكون ا مذنباً ، فإذا كانت الأدلة مسجلة بدقة لم يكن البوليس إذاً منصفاً . إذن إذا كان ا قد فرّ هارباً وكانت الأدلة مسجلة بدقة ، وإذن إذا كان البوليس منصفاً ، كان ا ملنباً .

ويلاحظ أنه توجد مقدمة وحيدة فقط وأن النتيجة مكافئة لها إذن وليست مستلزمة وحسب بواسطة المقدمة . وقد نتمثل البرهان كالاتي :

(١) ب (ف ب ج) ب (د ب ي)

إذن : (ف . د) ب (ي ب ج)

(٢) (ف ب ج) v (د ب ي) (من (١) بواسطة ص ١٧١)

(٣) (ب ف v ج) v (ب د v ي) (من (٢) بواسطة ص ١٧١)

(٤) (ب ف v ب د v ي v ج) (من (٣) بواسطة ص ٩١ ، ١١)

(٥) $\sim (ف \vee د) \vee (ي \sim \vee ج)$ (من (٤) بواسطة ص ١٤)
 (٦) $(ف \vee د) \supset (ي \supset ج)$ (من (٥) بواسطة ص ١٧)
 تعد البراهين ما بين (٦) ، (٨) المذكورة هنا صالحة وسليمة منطقيًا
 وثبتت سلامتها باستخدام الصيغ الأساسية . ولا يمكن على أى حال أن نثبت
 بطريقة حاسمة على هذا النحو أن أى برهان غير سليم منطقيًا .

وسوف نحقق ولا شك إذا كان البرهان غير صالح أو غير سليم منطقيًا في
 أن نقوم بأى استبدالات تؤدي إلى النتيجة المطلوبة . ومع ذلك لا نستطيع
 دائماً أن نستوثق وتؤكد - في حالة تعقد البرهان - من أن إخفاقنا في بلوغ الهدف
 لا يرجع فقط إلى عدم قدرتنا على رؤية الاستبدالات التى ينبغى أن نقوم بها .
 ولكن في الحالات البسيطة من البراهين غير الصحيحة منطقيًا يصبح من الواضح
 بعد خطوات قليلة أنه لا يمكن بلوغ النتيجة .

فمثلاً :

(٩) إذا تم انتخاب ا فسيستقبل ب . وإذا تم انتخاب ج فلن يستقبل ب .
 فإذا تم انتخاب ا فلن يتم انتخاب ج . إذن : فسوف يستقبل ب .
 وأمامنا :

$$(١) ا \supset ب$$

$$(٢) ج \supset \sim ب$$

$$(٣) ا \supset \sim ج$$

إذن ب

ويصبح من الواضح بمجرد تشكيل البرهان ضرورياً أنه لن يمكن إطلاقاً
 إثبات النتيجة العملية (ب) من المقدمات الثلاث التى تعد جميعها شرطية .
 وبالإضافة إلى ذلك لا يمكن أن يكون الوضوح الذاتى على الإطلاق مرشداً
 يعتمد عليه كاختبار للسلامة المنطقية ومن المرغوب فيه دائماً فحص نتائج

البداية عن طريق اختبار أكثر موضوعية . فإذا شككنا في أن البرهان الذي نختبره بهذه الوسائل غير سليم منطقياً أمكننا دائماً الرجوع إلى إجراء من إجراءات الاستدلال القاطع كيما يعطينا إجابة صريحة لا لبس فيها .

ثبت المراجع للفصلين الثاني والثالث

يمكن العثور على تناول طيب لمنهج جداول الصدق الخاصة بالاستدلال القاطع في كتاب أمبروز ولازيروفيتش (١) وكولي (٧) ورايشنباخ (٢٥) ويوجد عرض تقليدي لحساب القضايا لدى كل من هيلبرت وأكرمان (١٢) غير أنه لابد من ملاحظة أن طريقة العرض شديدة التركيز وتتطلب دراسة واعية .

الفصل الرابع

منهج البديهيات

١ - الغرض من منهج البديهيات :

من شأن إجراءات الاستدلال القاطع التي ناقشناها من قبل أن تعيننا على تمييز تعبيرات دوال الصدق التي تعدّ تحصيل حاصل أو بمثابة القوانين المنطقية مما عداها . غير أن هذه الإجراءات لا تمنحنا أى وسيلة من أجل إقامة عبارات تحصيل الحاصل وإنشائها ^(١) .

ولهذا فإن حاجتنا إلى إجراء آخر من نوع مختلف ماسة . وقد ذلل لنا هذا المطلب منهج البديهيات . وهو منهج مألوف لدى معظم الناس في صورته غير الناضجة في هندسة إقليدس :

ولاستخدام منهج البديهيات نعمل إلى اختيار عدد من القضايا المعروفة باسم البديهيات (أو المصادرات) كنقطة ابتداء ونشرع نستنبط قضايا أخرى (تعرف باسم أحكام البداهة Theorems) من البديهيات بمساعدة بعض التعريفات .

واستخدام منهج البديهيات في المنطق مشابه لذلك ، ولكننا نحتاج إلى حرص وتخصيص أكبر فيما يتعلق بنقطة البدء عما كان مطلوباً في هندسة إقليدس . إذ أن هندسة إقليدس تأخذ بالمسلمات بدون أن تذكر الإجراءات العادية للاستدلال

(١) لم نحاول وضع المصطلحات الإفرنجية إلى جانب مقابلها العربي إلا قليلاً وذلك حرصاً على استرسال تفكير القارئ وعلى تعويده الأسلوب العربي . ومن ناحية أخرى حاولنا أن نستبق الرموز وأشكال العبارات المنطقية الصورية في أقرب وضع مما هو متبع في الكتب الأجنبية من أجل إمكان مواصلة الطالب قراءاته للموضوع باللغات الأخرى . (المترجم)

الهندسى . وقد لا نقوم بذلك بطبيعة الحال عند إنشاء أساس من البديهيات فى جزء من المنطق نفسه .

وقبل أن نتقدم نحو وضع أساس النسق الخاص بالبديهيات ونحو استخدامه فى إقامة الاستدلالات قد يكون من الأفضل أن نعيد الاتفاق مرة أخرى من أجل توضيح الغرض من منهج البديهيات . وقد رأينا أن تعبيرات دوال الصدق الخاصة بحساب القضايا يتم بناؤها ابتداء من ثلاثة أنواع مختلفة من المواد الأساسية :

أولاً : متغيرات قضوية .

ثانياً : ثوابت منطقية .

ثالثاً : أقواس تفصح عن « مجال » الثوابت المنطقية «The scope» .

وليس من المسموح به على أى حال أن نضع هذه المواد بعضها مع بعض على النحو الذى يرضينا . فبعض التأليفات من هذه المواد تقيم تعبيرات دوال الصدق وبعضها الآخر لا يؤدي إلى نفس النتيجة .

مثال ذلك :

$$(S \supset V) \equiv (S \supset V \supset S)$$

وكذلك (S ∨ V) ∨ L

كلاهما من التعبيرات المسموح بها .

أما :

$$(S \supset V \supset S)$$

أو (S ∨ V ≡ S)

فغير مسموح بها .

وقد نظرنا إلى هذا الاختلاف على أنه واضح بالبداية ولكننا نود أن نشير

إليه الآن إشارة ظاهرة . وسنفعل ذلك عن طريق وضع كل التأليفات الممكنة من المواد الأساسية في صنفين متميزين :

أولاً : التعبيرات المسموح بها أو ذات المعنى وتسمى بالصيغ ذات التكوين الصحيح .

ثانياً : تأليفات غير ذات معنى أو غير مشروعة مثل س \equiv ٧٠ ص ٧

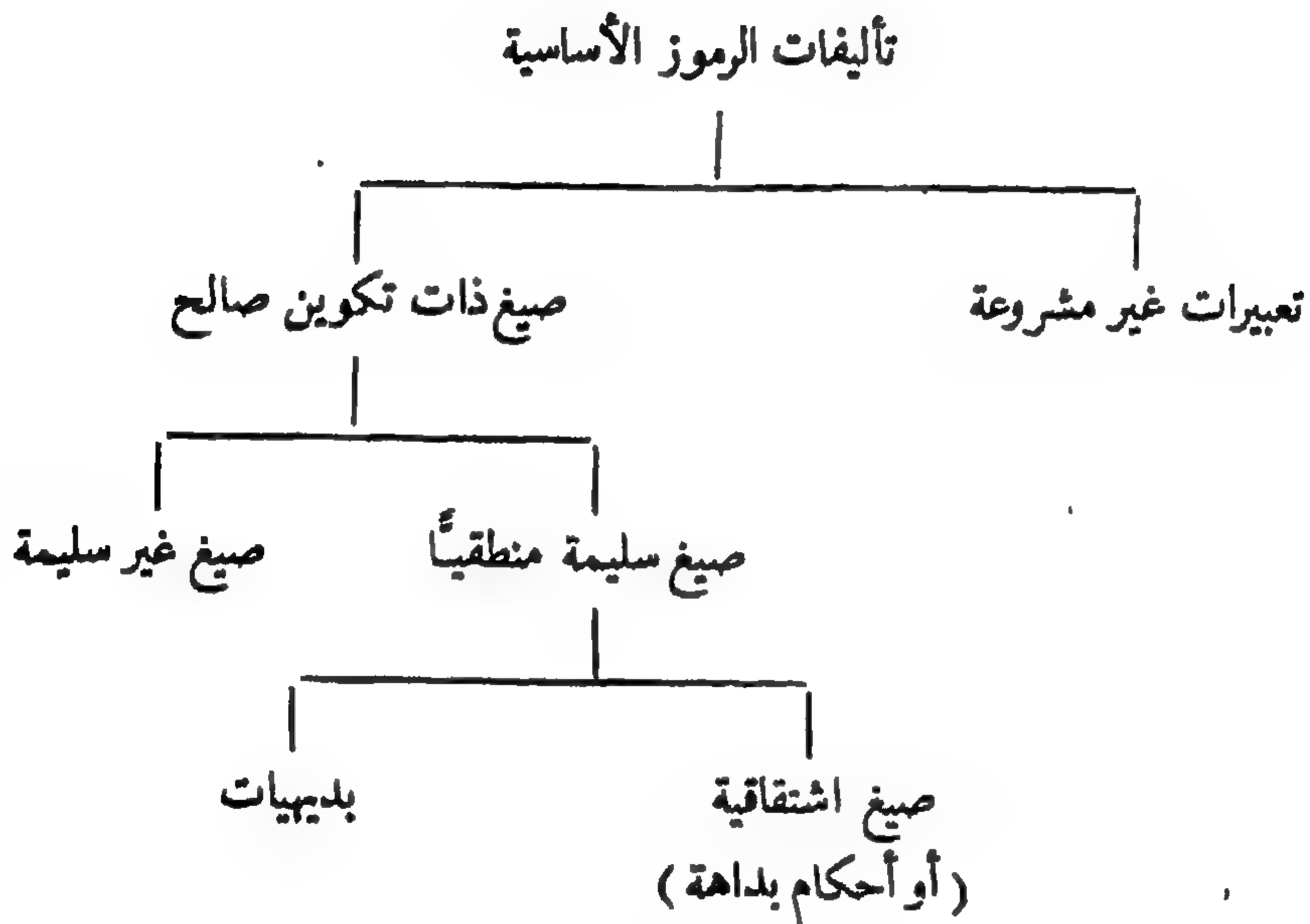
ويمكن تقريب الفكرة بواسطة الفارق المشابه في اللغة العادية بين الجمل المقامة وفقاً لقواعد النحو والتركيب (الستاكس) وعبارات حشد الألفاظ وحسب مثل : (جدا القط بين يكون أى فوق) مما يسمى عادة بالعبارات التي لا معنى لها . وتوضيح الفارق الدقيق بين العبارات ذات المعنى والعبارات الخالية من المعنى في اللغة العادية ليس بالأمر الهين برغم أن أطراف العبارات الخالية من المعنى واضحة بما فيه الكفاية : أما في المنطق فمن الممكن لحسن الحظ إقامة فارق مشابه ذى دقة متناهية بفضل قواعد محددة .

ونجد أنفسنا معنيين بنوع واحد فقط من بين هذين النمطين من التعبير وهو بطبيعة الحال النمط الخاص بالصيغ ذات التكوين الصالح . ولكن هذا النمط ينقسم بدوره إلى صنفين هما صنف العبارات تحصيل الحاصل أو العبارات الصادقة منطقياً (وهى التى تتميز بأنها فقط (١) فى العمود الرئيسى من جداول المصدق الخاصة) وصنف آخر هو صنف العبارات التى لا تصدق منطقياً وإنما تكون إما متناقضة أو جائزة (محتملة) ومرة أخرى نجد أنفسنا معنيين أولاً وقبل كل شيء بالصنف الأول من هذين الصنفين .

ونحن نستخدم منهج البديهيات من أجل بناء تعبيرات تحصيل حاصل بأكملها على أساس بعض المواد الضرورية المبدئية .

ويمكننا أيضاً تقسيم هذه التعبيرات الأخيرة إلى تلك التي نأخذها كنقطة ابتداء في نسق البديهيات الذي نقيمه وتلك التي ندعها إلى أن تثبت صحتها في النسق . ونطلق على أعضاء المجموعة الأولى اسم البديهيات (أو المصادرات) ونطلق على أعضاء المجموعة الثانية اسم الصيغ الاشتقاقية أو أحكام البداهة .

ويمكننا تمثيل العلاقات بين مختلف تلك الأنماط من التعبيرات على النحو الآتي :



والمواد الأساسية التي نحتاج إليها من أجل بناء نسق البديهيات هي كالآتي :

١ - قواعد تركيب (سنتاكس) .

٢ - تعريفات .

٣ - بديهيات .

وستنظر الآن في كل منها بدوره .

٢ - بناء نسق البديهيات :

قواعد التركيب اللغوي أو السينتاكس :

لفظة سينتاكس أو التركيب اللغوي من الألفاظ التي يجري استخدامها في المنطق شأن أي مصطلح فني أصيل وإن كان هذا المعنى الفني الخاص يماثل معناه أيضاً في اللغة العادية^(١) . ويشير المعنى الأصلي للفظ « سينتاكس » وفقاً لما جاء بقاموس أكسفورد الإنجليزي إلى (تنظيم الأجزاء أو العناصر تنظيمياً نسقياً أو تنظيمياً ترتيبياً) وبمضي الوقت صار استخدام هذا اللفظ أكثر تخصصاً وأصبح معناه المقبول عادة كما يشير إليه نفس هذا القاموس هو (تنظيم الألفاظ في صور وأشكال مناسبة تظهر ارتباطها وعلاقتها داخل العبارة) .

أما في المنطق فكلمة «السينتاكس المنطقي» (أو كما يقال باختصار السياق) تشير إلى القواعد التي تتحكم في العلاقات بين الرموز المنطقية . ويوجد صنفان رئيسيان من هذه القواعد . الصنف الأول من هذه القواعد يتحكم في بناء القضايا ذات التكوين الصحيح (وهي ما نشير إليه باختصار بالحروف ق ت ص) ، وتعرف باسم قواعد التكوين . ويحتاج إلى صنف آخر . من القواعد لتحديد لحظة إمكان تسمية القضية باسم القضية المترتبة على ما قبلها أو باسم القضية التي تتبع ما قبلها . ويعرف هذا الصنف الآخر باسم قواعد التحويل^(٢) . ولعلنا ننظر الآن في هذه القواعد بالتفصيل .

(١) من المؤكد أن معظم الأفكار الواردة في هذا الكتاب أفكار بسيطة أولية مر بها طالب الفلسفة في أوليات دراسته . وقد عرف بموضوع الستاكس فيلسوف من حلقة فيينا هو رودلف كارناب ويمكن الرجوع إلى مؤلفاته للتوسع في صلة الستاكس بالمنطق الرمزي .
(المترجم)

(٢) الأفكار والمصطلحات المنطقية الواردة في هذا الكتاب يلم بها الطالب الأوروبي في المرحلة الثانوية إلاماً كاملاً وبخاصة في فرنسا حيث الفلسفة مادة أساسية واسعة في المرحلة التوجيهية وتشكل دراستها مقدمة لكافة أفرع الفلسفة .
(المترجم)

١ - قواعد التكوين :

أولاً : قاعدة التكوين التركيبي الأولى (ق ت ت رقم ١) :

(هذه القاعدة تحدد المقولات أو التصورات الأولية الخاصة بحساب القضايا).

توجد ثلاث مقولات من هذا القبيل :

(١) الرموز س ، ص ، ل ٠٠٠ (أو بدلا من ذلك على التوالى س ١ ، س ٢ ، س ٣ ٠٠٠٠٠٠ س ن) تقوم كلها مقام متغيرات القضايا بمعنى أنها تمثل أى قضية مهما كانت بحياد تام .

(ب) الثوابت المنطقية وتتألف من ثابتة تسبق الحد هي (هـ) ومن الثوابت الأخرى ذات الحدين هي (٠) ، (v) ، (c) و (≡) .

(حـ) تصور « مجال الثوابت » المعبر عنه بالأقواس مثل (٠٠٠٠) .

ثانياً : قاعدة التكوين التركيبي الثانية (ق ت ت رقم ٢) :

(هذه القاعدة تتحكم في إنشاء الصيغ السليمة ويشار إليها بالحرفين ص س)

(١) المتغير القسوى هو (ص س) .

(ب) إذا كانت (س) توصف بأنها (ص س)

كانت (هـ س) أيضاً (ص س)

(حـ) كل اثنتين من الصيغ السليمة الموصولتين بثابت ذى حدين يمثلان

(ص س) جديدة .

(على ذلك إذا كان (س) ، (ص) كلاهما (ص س)

كانت بالتالى (س ٠ ص) ، (س v ص)

(س ≡ ص) ، (س ⊂ ص)

محدوداً بذلك المتغير وإذا جاء بعدها قوس مفتوح « (» امتد مجال (م) إلى القوس النهائي المقفل . (ارجع إلى الأمثلة في الفصل الثالث - الفقرة الثانية - فيما سبق) .

٢ - وإذا تقدم إحدى الثوابت ذات الحدين متغير قضوى كان مجال الثابتة في هذا التسانده مقيداً بذلك المتغير . وإذا تقدمت إحدى الثوابت ذات الحدين قوساً مفتوحاً امتد مجال تلك الثابتة حتى القوس النهائي المقفل . (انظر الأمثلة المذكورة من قبل) .

٣ - تعريف القوس المناظر المفتوح هو رقم (ن + ١) بالنسبة إلى القوس المقفل الذي يتلو عندما تجيء (ن) الخاصة بالقوس المفتوح . وبالمثل يكون رقم القوس المناظر المقفل هو (ن + ١) بالنسبة إلى القوس المفتوح السابق عندما تجيء (ن) الخاصة بالقوس المقفل .

لنأخذ العبارة على سبيل المثال^(١) :

[((س < ص) < (س < ل)) < (ص < ل)] ٧ (ط ٧ م)

فهنا نجد أن القوس المقفل المناظر للقوس المفتوح الأول هو القوس المقفل الخامس . والقوس المفتوح المناظر للقوس الثالث المقفل هو الثاني . . . وهكذا .
دواليك .

(١) نضع القوس الكبير « [] » كبداية كبرى ونهاية كبرى إذا جاءت بينه أقواس صغرى لجرد التخفيف على الملاحظة والقراءة وإن كان المؤلف يستعمل دائماً الأقواس الصغرى . ويلاحظ أن الأقواس لها دور أساسي لأنها تشير إلى مجالات الثوابت داخل الصيغ القضيوية وسوف يأتي شرحها فيما بعد وسنخصص القوس المتوسط بشكل { إذا كان هناك قوس أصغر ثالث « (» في العبارة (المترجم) .

رابعاً : قاعدة التكوين التركيبى الرابعة (ق ت ت رقم ٤) :

الرموز الميتامنتقية :

سوف تستخدم حروف التاج $\hat{س}$ ، $\hat{ص}$ ، $\hat{ل}$ كرموز ميتامنتقية .
ويمكن اعتبار هذه الرموز كصف ثان من المتغيرات التى تتكون قيمها كصيغة سليمة (يشار إليها بالحرفين ص س) وفقاً لقاعدة التكوين التركيبى (ق ت ت) الثانية الواردة من قبل . وعلى ذلك فهذه الرموز تستخدم لتمثيل القضايا التى تبقى صورها المنطقية بلا تحديد . (انظر مثلاً لذلك فى استخدامها على نحو ما جاء فى الفصل الثالث - الفقرة السابعة فيما تقدم) .

تستطيع ($\hat{س}$ \vee $\hat{ص}$) إذن أن تقوم عادة مقام أى صيغة سليمة (ص س) ذات ثابتة من ثوابت الشرط المنفصل التى تتميز بمجالها الواسع . وبالمثل تستطيع ($\hat{س}$) أن تقوم مقام أى تعبير متنى ...

ونلجأ إلى الرموز من هذا النوع من أجل التعبير عن قواعد التحويل الخاصة بالنسق فى صورة عامة . وليست هذه الرموز مما يجرى استعماله فى نسق البديهيات وإنما تطلب لكى تكون بمثابة الكلام عن النسق . ويقال إذن إنها تنتمى إلى « الميتالغة » الخاصة بمنطق القضايا .

٢ - قواعد التحويل :

أولاً : قاعدة استبدال التوافق (ق ح رقم ١) :

وهى أن تحل أى صيغة سليمة محل أى متغير قضوى خلال التعبير .

مثال ذلك أن العبارة ،

[(س \supset ص) \vee (ص \supset س)]

يمكن أن تكتب على النحو التالي :

[(س ٧ ص) (ص) ٠ (ص) [(ص) (س ٧ ص)]

مع إحلال (س ٧ ص) محل المتغير س خلال التعبير الأول . ونعبر عن الواقعة الخاصة بهذا الاستبدال الذي تم ههنا بكتابة « (س ٧ ص) / س » إلى جانب الصيغة الجديدة^(١) .

ثانياً : قاعدة « النقل عن » بواسطة التعريف (ق ح رقم ٢) :

يمكننا أن نستبدل بأى جزء فى الصيغ السليمة أو تحصيل الحاصل (أعنى فى أى بديهية أو أحكام بداهة) تعبيراً مكافئاً له بواسطة التعريفات الثلاث الواردة فيما بعد (من تف ١ حتى تف ٣)^(٢) .

فمثلاً بدلاً من :

[(س ٥ ص) ٠ (ص ٥ ل)] ٧ (س ٥ ل)

يمكننا أن نكتب الآتى :

ـ [(س ٥ ص) ٠ (ص ٥ ل)] ٧ (س ٥ ل)

وذلك وفقاً للتعريف الثانى (تف ٢) فيما يلى . وبالمثل يمكننا أن ندون نفس التعبير وفقاً لهذه القاعدة ولكن باستخدام (تف ١) كما يلى :

ـ [(س ٥ ص) ٧ (ص ٥ ل)] (س ٥ ل)

ويلاحظ هنا أن الاستبدال حسب (ق ح ٢) لا يحتاج لأن يتم خلال الصيغ كما هو الحال فى (ق ح ١) .

(١) ليست الشرطة الفاصلة هنا بطبيعة الحال هى الثابتة الخاصة بدالة الشطب (التي لم تدرج هنا فى هذا النسق الخاص بالبديهيات) ولكنها تقوم بدور واحد وهو تمثيل عملية الاستبدال حسب ق ح رقم ١ . (المترجم) .

(٢) سيأخذ لفظ تعريف رمزاً محدداً هو « تف » على نحو ما سوف نرى فيما بعد .

ثالثاً : قاعدة الاستخلاص (ق ح رقم ٣) :

إذا كان «س» «ص» «و» «ش» كلاهما تحصيل حاصل أو صيغ سليمة...
كانت «ص» أيضاً صيغة سليمة أو تحصيل حاصل^(١).

رابعاً : قاعدة الإضافة (ق ح رقم ٤) :

إذا كانت «س» تحصيل حاصل أو صيغة سليمة وكانت «ص» نفس
الشيء... كان «س» «ص» تحصيل حاصل أو صيغة سليمة.
وتكفي قواعد الستاكس أو السياق الواردة عليه لكي تعاون في إقامة نسق
البديهيّات. ولكن من الممكن ومن المفيد كذلك البرهنة على قواعد أخرى للستاكس
أو السياق كما دعت الحاجة إلى ذلك^(٢).

٣ - التعريفات^(٣) :

(تف ١) س • ص = ت ت (س • ص) (ص • س)

(تف ٢) س • ص = ت ت (س • ص) (ص • س)

(تف ٣) س ≡ ص = ت ت (س • ص) (ص • س) • (ص • س)

٤ - البديهيّات :

في مقدورنا اختيار عدد كبير جداً من البديهيّات الخاصة بنسقنا. ولكن
مهما كان اختيارنا فن الضروري أن نخضع في اختيارنا ذاك لبعض الشروط :

(١) راجع الفقرة (٣) من الفصل الثالث.

(٢) انظر الفقرة (٤) من الفصل الثاني.

(٣) تنص هذه التعريفات وحدها بالحروف (تف).

أولاً : يجب أن تكون مجموعة البديهيات التي نختارها ونتتقها متميزة بالتوافق فيما بينهما . وهذا يعنى فى الواقع العلمى أنها لا بد أن تكون بحيث لا يمكن استنباط أحكام بداهة وعكسها منها عند تطبيق قواعد الستاكس الواردة فيما تقدم ، إذ لو استطعنا أن نفعل ذلك لكان فى إمكاننا إثبات أى قضية كانت وصار منطقنا بالتالى غير قادر على تمييز القضايا السليمة من القضايا غير السليمة وتحقيق أيضاً عدم جدواه .

وينبغى على الأخص أن تستحيل البرهنة على « س » كحكم من أحكام البداهة اعتماداً على بديهياتنا لأن ذلك سيعنى كما سوف نرى أن النسق غير بحكم التوافق . وسناقش هذه النقطة بتفصيل أكبر فى نفس الوقت مع برهان التوافق الخاص ببديهياتنا فيما بعد .

وهناك خاصية ثانية ينبغى أن تتميز بها مجموعة البديهيات إذا كان مطلوباً منها أن تخلق أساساً مقبولاً للنسق المنطقى . إذ ينبغى أن تخلق مجموعة البديهيات أساساً متكافئاً للبرهنة على كل تحصيلات الحاصل الخاصة بالمنطق موضوع الاهتمام . أو بعبارة اصطلاحية فنية يجب أن تكون البديهيات تامة .

والخاصية الثالثة لمجموعة بديهياتنا ، وإن تكن ضرورية بصفة قاطعة ، هى أنه من المستحب جداً برغم ذلك أن تتميز هذه البديهيات بالاستقلال . وبعبارة أخرى لا يمكن إثبات أى بديهية من تلك البديهيات كحكم بداهة بناء على أحكام بداهة أخرى ، وبالتالى لا تتصف أى بديهية من البديهيات بالتكرار والتطويل .

وسوف نتعرض فيما بعد لهذه المتطلبات فى تفصيل أكبر ، كما أننا سنبرهن على أن مجموعة البديهيات التي نختارها ونتتقها ستوافر لها فى الواقع هذه الخصائص . أما البديهيات التالية فهى أربع من خمس بديهيات استخدمها هويتيد ورسل فى نسق منطق القضايا الذى ورد فى كتابهما البرنكيبيا أو أسس الرياضيات .

(وقد ثبت أن البديهية الخامسة غير مستقلة عن البديهيات الأربع الأخرى) :

ب ١ - (ص ٧ ص) ح س

ب ٢ - ص ح (ص ٧ ص)

ب ٣ - (ص ٧ ص) ح (ص ٧ ص)

ب ٤ - (ص ح ل) ح [(ص ٧ ص) ح (ص ٧ ل)]

وعند مواجهة هذه البديهيات لأول مرة نجد أنخص ملاحظها الملحوظة أنها تافهة . وتبرز هذه الخاصية بوضوحاً جدياً إذا قمنا بترجمة هذه البديهيات عن طريق إحلال قضايا معينة محل المتغيرات القضية . مثال ذلك أن البديهية الأولى تحتل القراءة وفقاً لهذه الترجمة على النحو التالي :

« إذا كانت السماء تمطر

أو أنها تمطر

فهى إذن تمطر »

وكذلك (ب ٢) قد تترجم كما يلى :

« إذا كانت السماء تمطر ثلجاً

فهى إما أنها تمطر ماء

أو أنها تمطر ثلجاً »

وقد يدهش القارئ كيف يمكن أن نصير مثل هذه القضايا الفارغة الخالية من المعنى ذات قيمة ما بوصفها أساساً للنسق المنطقى .

ونجيب عن ذلك بأنه برغم أن المضمون الخاص بهذه البديهيات تافه فارغ فإن كل ما يترتب عليها من القضايا أو أحكام البداهة التى تستنبط منها وفقاً لقواعد الستاكس ليست دائماً تافهة . وعلى ذلك فإذا كان نسق البديهيات تاماً فسوف

البرهان :

يمكن إنشاء سلسلة من الصيغ التي تبدأ بالبديهية الأولى (ب ١) .

١ - (س ٧ س) س

ووفقاً لقاعدة التحويل الأولى (ق ح ١) نضع

(س س) محل (س) في (١) السابقة .

٢ - (س س ٧ س) س

ثم نضع (س س س) محل (س س ٧ س) في (٢) السابقة

حسب (تف ١) ؛ (ق ح ٢) .

٣ - (س س س س) س

وهكذا تؤدي سلسلة الصيغ من (١) إلى (٣) إلى إنشاء برهان خاص برقم (٣)

داخل (ن ب)

ويمكن إبراز العملية صورياً على الوجه التالي :

١ - (س ٧ س) س (ب ١)

٢ - (س س ٧ س) س (١) ثم (ق ح ١) ثم (س س / س)

٣ - (س س س س) س (٢) ثم (ق ح ٢) ثم (تف ١)

على أننا سنحتاج فيما يلي إلى النظر بعين الاعتبار إلى أحكام البداهة عن (ن ب) بالإضافة إلى الصيغ المشتقة منها . ذلك أن أحكام البداهة عن (ن ب) ليست هي نفسها الصيغ المشتقة . إنها أكثر من ذلك عبارة عن أحكام تقريرية صادقة تجعل من بعض الصيغ ما هو مشتق (أو غير مشتق) وهكذا . ومن الواضح أن الاشتقاق بداخل (ن ب) يمكن أن يؤدي إلى إيجاد قابلية اشتقاق إحدى الصيغ داخل (ن ب) . ولكن مهما كان عدد هذه الاشتقاقات فلن يؤدي ذلك إلى أن تصبح صيغة غير قابلة للاشتقاق أو إلى أن عدداً لا نهائياً من الصيغ من هذا النوع يصبح قابلاً للاشتقاق . ولا بد لتأسيس أحكام بداهة من هذا النوع من تجاوز (ن ب) على نحو ما كانت عليه ورؤيتها من جديد كموضوع معروض للبحث .

ولن نعمل فيما يلي إلى اشتقاق عدد جزافي في الصيغ ما دامت قيمتها في حكم الشيء القليل الأهمية .

وبدلاً من ذلك ستوجه جهودنا إلى إثبات حقائق معينة بشأن (ن ب) ، وأول حقيقة نسعى لإثباتها هي أن :

كل حكم تحصيل حاصل هو قضية مشتقة من (ن ب) .

وهذا من شأنه أن يثبت ما يسمى بالتام فيما يتعلق بنسق البديهيات (ن ب) .
فالتام طابع مميز هام بشأن (ن ب) .

٤ - ملاحظات أولية عن التام^(١) :

كيف نثبت أن كل حكم تحصيل حاصل هو حكم قابل للاشتقاق ؟ من الواضح أنه لا يمكن تحقيق ذلك بمجرد الاشتقاق الفعلي لكل عبارة تحصيل حاصل لأن هذه العملية ستكون عملية لا نهائية .

دعنا أولاً نتأمل القضية الأكثر بساطة :

كل عبارة تحصيل ذات صورة وصل عادية مشتقة ويمكن البرهنة على ذلك بالطريقة الآتية :

أولاً : تكون العبارة ذات الصورة العادية للوصل عبارة تحصيل حاصل في حالة واحدة فقط ، وهي عندما تكون كل واحدة من مكوناتها الشرطيتين المنفصلتين عبارة تحصيل حاصل . ثانياً : تكون الشرطية المنفصلة تحصيل حاصل في حالة واحدة فقط وهي عندما تكون صورتها كالاتي :

س^٨ ص^٧ س^٧ م^٧ س^٧ ص^٨

(١) يمكن استبعاد هذه الفقرة عند القراءة الأولى للكتاب إذا رُئيت صعوبة في تفصيلات البرهان .

وتمثل كل من S^A ، S^B نفسيهما هنا قضية شرطية منفصلة . فهل في إمكاننا أن نثبت أن كل مثل هذه القضايا الشرطية المنفصلة صيغ مشتقة داخل (ن ب) ؟ من أجل تحقيق ذلك يجب أن نثبت ثلاثة أشياء :

- ١ - S^A ، S^B صيغة مشتقة بداخل ن ب .
 - ٢ - إذا كانت S^A صيغة مشتقة فكذلك تكون (S^A ، S^B) صيغة مشتقة .
 - ٣ - إذا كانت S^B صيغة مشتقة فكذلك تكون (S^A ، S^B) صيغة مشتقة .
- وفي حالة توافر هذه القضايا الثلاث المفترضة^(١) Lemmas «المأخوذات» تتلو بعد ذلك مباشرة أحكام البداهة .

حكم البداهة رقم (١) :

كل الصيغ من نوع (S^A ، S^B) عبارة عن صيغ مشتقة داخل ن ب .

وتعطينا قاعدة الإضافة (ق ح رقم ٤) حكم البداهة الثاني :

حكم البداهة رقم (٢) :

جميع القضايا الشرطية المتصلة من الصيغ ذات الصورة :

(S^A ، S^B) (أو بمعنى آخر كل صور العطف العادية) هي صيغ مشتقة داخل ن ب .

(١) القضية المفترضة Lemmas هي قضية يمكن الأخذ بها أو البرهنة عليها كقضية أولية بالنسبة إلى البرهان الخاص بأى قضية أخرى . وفي منطق أرسطو القضية المفترضة هي المقدمة الكبرى في القياس . أما في الرياضيات فالقضية المفترضة هي حكم البداهة الذي يجرى إثباته لاستخدامه من أجل إثبات حكم بداهة آخر . ويطلق عليها اسم القضية المفترضة بالذات حين تصبح هذه القضية المفروضة بغير أهمية في حد ذاتها بعد إثبات حكم البداهة الذي جاء لصالحه . أى أن القضية المفروضة هي حكم بداهة انتهت مهمته بإثبات حكم بداهة آخر انبنى وجوده عليه وتسمى هذه القضايا بالمأخوذات . « المترجم »

وبتوافر هذين الحكيمن من أحكام البداهة علينا أن نظهر بعد ذلك أن كل عبارات تحصيل الحاصل هي صيغ مشتقة داخل ن ب . وهذا هو ما تفعله أيضاً عندما نظهر .

حكم البداهة رقم (٣) :

إذا كانت إحدى صور العطف العادية صيغة مشتقة داخل ن ب فكل الصيغ التي تقبل أن ترد إلى هذه الصورة العادية هي إذن كذلك صيغ مشتقة .

وعلينا أن نتذكر أن الرد reduction إلى صورة العطف العادية إنما يتم ويتحقق بواسطة تتابع التطبيقات الخاصة بالعمليات التالية :

- (أ) استخدام \bar{S} للتعبير عن $\bar{S} \bar{S} \bar{S}$
 - (ب) استخدام $\bar{S} \bar{S} \bar{V}$ للتعبير عن $\bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S}$
 - (ج) استخدام $\bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S}$ للتعبير عن $\bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S}$
 - (د) استخدام $\bar{S} \bar{S} \bar{V} \bar{S}$ للتعبير عن $\bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S}$
 - (هـ) استخدام $\bar{S} \bar{S} \bar{V} \bar{S} \bar{S}$ للتعبير عن $\bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S} \bar{S}$
- وبالتالي فسوف تكفي البرهنة على :

حكم البداهة رقم (٤) :

إذا كانت الصيغة \bar{S} صيغة مشتقة داخل (ن ب) فأى صيغة إذن يمكن اشتقاق \bar{S} منها عن طريق إجراء أى عملية من العمليات الخمس المذكورة عاليه هي أيضاً صيغة مشتقة .

قانون الاطراد Regularity :

من أجل تشييد التمام سنحتاج إلى إظهار أن الصيغ الآتية هي صيغ مشتقة :

$$١ - \text{س} \text{ — } \text{ص} \text{ — } \text{س}$$

$$٢ - \text{س} \text{ — } \text{س} \text{ — } \text{ص} \text{ — } \text{س}$$

$$٣ - \text{س} \text{ — } \text{س} \text{ — } \text{س} \text{ — } \text{ص}$$

$$٤ - \text{س} \text{ — } \text{س} \text{ — } \text{س} \text{ — } \text{س}$$

$$٥ - (\text{س} \text{ — } \text{ص} \text{ — } \text{س}) \text{ — } \text{س} \text{ — } \text{ص} \text{ — } \text{س}$$

$$٦ - (\text{س} \text{ — } \text{س} \text{ — } \text{ص}) \text{ — } \text{س} \text{ — } \text{ص} \text{ — } \text{س}$$

$$٧ - (\text{س} \text{ — } \text{ص} \text{ — } \text{س}) \text{ — } \text{س} \text{ — } \text{ص} \text{ — } \text{س}$$

$$٨ - (\text{س} \text{ — } \text{ص} \text{ — } \text{س}) \text{ — } (\text{س} \text{ — } \text{ص} \text{ — } \text{س}) \text{ — } \text{س} \text{ — } \text{ص} \text{ — } \text{س}$$

غير أننا إذا شئنا استخدام هذه الصيغ من أجل رد الصيغ إلى صور عادية داخل (ن ب) فن الضروري أن ننشئ أولاً بعض الملامح الأكثر عمومية فيما يخص النسق .

فمثلاً تتألف إحدى الخطوات في الرد المعتاد إلى الصورة العادية من إحلال (س) مثلاً محل الموقع الذي تحتله (س — س — س) في الصيغة المراد ردها . وعلى ذلك إذا كان لدينا صيغة مثل :

$$٩ - \text{س} \text{ — } \text{س} \text{ — } \text{س} \text{ — } \text{ص} \text{ — } \text{س}$$

فستعتمد أول خطوة نخطوها إلى عملية الإحلال التي أشرنا إليها بحيث نحصل على :

$$١٠ - \text{س} \text{ — } \text{س} \text{ — } \text{ص} \text{ — } \text{س}$$

ونأخذ في الرد المعتاد بأنه إذا كانت س \equiv س — س — س هي تحصيل حاصل فبالتالي تكون العبارة « رقم (٩) \equiv رقم (١٠) » هي عبارة تحصيل حاصل . ويحل محل تصور تحصيل الحاصل داخل نسقنا ن ب تصور الصيغة المشتقة . ولذلك فعلينا أن نبرهن أنه :

إذا كانت $s \equiv \bar{s} \bar{s} s$ صيغة مشتقة داخل n ب

فإذن $(9) \equiv (10)$ هي أيضاً صيغة مشتقة .

ومن الضروري بشكل عام أن ننشئ "حكم البداهة التالي بشأن (n, b) :

حكم البداهة رقم (5) :

لنفرض أنه توجد الصيغة s^{\wedge} التي تحتوي على الصيغة $(\bar{s})^{\wedge}$ ولنفرض أنه قد تم الحصول على s^{\wedge} من s^{\wedge} بإحلال $(\bar{s})^{\wedge}$ محل الموقع الذي تحتله $(\bar{s})^{\wedge}$ في s^{\wedge} . وعلى ذلك فإذا كانت العبارة $(\bar{s})^{\wedge} \equiv (\bar{s})^{\wedge}$ صيغة مشتقة داخل n ب فإن s^{\wedge} كذلك هي صيغة مشتقة داخل n ب .

ومن الواضح أن حكم البداهة رقم (4) يندرج مباشرة تحت حكم البداهة رقم (5) وكذلك تحت الاشتقاق في الصيغ ما بين (4) ، (8) السابقة . وذلك لأنه إذا كانت $\bar{s} \equiv \bar{s} \bar{s} s$ وكانت s^{\wedge} صيغة مشتقة داخل n ب فلكذلك ستكون s^{\wedge} صيغة مشتقة داخل n ب بناء على حكم البداهة رقم (5) .

ومن أجل البرهنة على حكم البداهة رقم (5) نستطيع إنشاء اشتقاقية الصيغ التالية (وسوف يتضح الأمر هنا فيما بعد) :

$$11 - (s \bar{s} \bar{s} s) \equiv (\bar{s} \bar{s} s \bar{s})$$

$$12 - (s \bar{s} \bar{s} s) \bar{s} ((\bar{s} \bar{s} \bar{s} \bar{s}) \bar{s} (s \bar{s} \bar{s} \bar{s}))$$

وهكذا نتقدم الآن إلى اشتقاق الصيغ من (1) إلى (8) ومن (11) إلى (12) .

اشتقاق الصيغ في (n, b) :

ويجدر بنا هنا أن نورد اليديهيّات والقواعد الخاصة بنسق اليديهيّات مرة

أخرى .

البدييات :

- ١ - (س ٧ س) س
- ٢ - ص س (س ٧ ص)
- ٣ - (س ٧ ص) س (ص ٧ س)
- ٤ - (ص س ل) س ((س ٧ ص) س ل)

القواعد :

- ١ - الاستبدال
- ٢ - النقل بواسطة التعريف
- ٣ - الاستخلاص
- ٤ - الإضافة

التعريفات ^(١) :

- ١ - س ٠ ص = ت ت (س ٧ ص)
 - ٢ - س س = ص ت (س ٧ ص)
 - ٣ - س ≡ ص = ت ت (س س) ٠ (ص س)
- (ف ١) (س س ج س) س
- (وقد تمت البرهنة على هذه)

(١) يشار بالحروف (تف) إلى هذه التعريفات الثلاثة وحدها للتخصيص أما ما عداها فهو (ف) فقط .

(ف ٢) (س ٤ ص) ٤ (ل ٤ س) ٤ (ل ٤ ص)

البرهان :

(١) - (ص ٤ ل) ٤ (س ٧ ص) ٤ (س ٧ ل) ب ٤

(٢) - (س ٤ ص) ٤ (ل ٧ س) ٤ (ل ٧ ص)

(١) ، (س / ص ، ص / ل ، ل / س) ،

ق ح رقم ١

(٣) - (س ٤ ص) ٤ (ل ٤ س) ٤ (ل ٤ ص)

(٢) ، تف ٢ ، ق ح رقم ٢

وباستغلال طبيعة الاشتقاق في (ف ٢) نحقق القاعدة المشتقة (ق م)

التالية :

(ق م ١) إذا كان كل من (س^٨ ٤ ص^٨)

و (ص^٨ ٤ ل^٨)

قابليين للاشتقاق

فكذلك (س^٨ ٤ ل^٨)

البرهان :

ضع ص^٨ ، ل^٨ ، س^٨

محل س ، ص ، ل على التوالي في (ف ٢)

وطبق (ق ح ۳)

* * *

(ف ۳) س ۷ س

البرهان :

۱ - ص ۷ (س ۷ ص) (ب ۲)

۲ - س ۷ (س ۷ س) (۱) ، (ق ح ۱) ، (س/ص)

۳ - (س ۷ س) س (ب ۱)

۴ - س ۷ (۲) ، (۳) ، (ق ح ۳)

۵ - س ۷ س (۴) : (ق ح ۲) ، (تف ۲)

* * *

(ف ۴) س ۷ س

البرهان :

۱ - (س ۷ ص) (س ۷ س) (ب ۳)

۲ - (س ۷ س) (س ۷ س) (۱) ، (ق ح ۱) ، (س/س) ،
(س/ص)

۳ - س ۷ س (۲) ، ف ۳ ، ق ح ۳

* * *

(ف ۵) س ۷ س

البرهان :

۱ - س ۷ س س ف ۴

۲ - س ۷ س س س (۱) ، (ق ح ۱) ، (س/س) (س)

۳ - س س س س س (۲) ، (ق ح ۲) ، تف ۲

...

(ف ۶) س س س س

البرهان :

۱ - س س س س (ف ۵)

۲ - س س س س س (۱) ، (ق ح ۱) ، (س/س) (س)

۳ - (س س ل) س (س ۷ ص) س (س ۷ ل) (ب ۴)

۴ - (س س س س س) س (س ۷ س) (س)

س (س ۷ س س س س)

(۳) ، ق ح ۱ ، (س/س) (س) ،(س س س س ل)

۵ - (س ۷ س) س (س ۷ س س س س)

(۲) ، (۴) ، (ق ح ۳)

۶ - (س ۷ س س س س) (۵) ، (ف ۴) ، (ق ح ۳)

۷ - - - - - ۷ ص ۷ ص (۶) ، (ب ۳) ، (ق ح ۱)

(~ ~ ~ س / ص) ، (ق ح ۳)

٨ - س س س س (٧) ، (تف ٢) ، (ق ح ٢)

• • •

(ف ۷) س ≡ س س

البرهان :

استخدم (ف ٥) ، (ف ٦) ، (ق ح ٤) ، (ق ح ٣) ، (تف ٣)
(القارئ الآن في وضع يسمح له بإعداد بعض هذه البراهين فيما بينه وبين
نفسه بعد حصوله على العناصر المناسبة) .

• • •

(ف ۸) س ۵ (ص ۷ س)

البرهان :

استخدم (ب ۲)

(ف ۹) (س ۵ ص ۵) (ب ۵ ص ۵) (ج ۵ ص ۵)

البرهان :

۱ (ب س ص) \sqsubseteq (ص ص ب س)

ب ۳، ق ح ۱، (س/س)

۲ - (س د ص) د (ص د س) د (ص د س) د

(۱) ، ق ح ۲ ، تف ۲

(ف ١٠) (ص ص ص ص ص) (س ص ص ص ص)

البرهان :

مماثل لبرهان (ف ٩)

* * *

(ف ١١) (س ص ص ص ص) (ص ص ص ص ص)

البرهان :

(ف ٩) ، (ف ١٠) ، (ق ح ٤) ، (ف ٣)

* * *

(ف ١٢) س ص (س ص ص)

البرهان :

١ - (ص ص ص) (س ص ص ص) [س ص (ص ص ص)] ص
 {س ص (ص ص ص)}^(١)

(ف ٢) ، (ق ح ١) ، (ص ص ص/س) ،

(س ص ص/ص) ، (س/ل)

٢ - [س ص (ص ص ص)] ص [س ص (ص ص ص)]

(١) ، (ب ٣) ، (ق ح ٣)

(١) عند الطباعة فضلنا أن يتم وضع الأقواس بالترتيب الآتي : القوس الأكبر يأخذ علامة « [» ، والقوس المتوسط يأخذ شكل « } » ، والقوس الأصغر يأخذ شكل « () » وذلك للإشارة إلى المجالات الأكبر والأوسط والأصغر على التوالي .
 (المترجم)

(٢)، ف ٨، (ق ح ٣)

٣ - س (س ٧ ص)

* * *

(ف ١٣) (س (ص) (ص (ل) (س (ل) [

البرهان :

نترك هذا البرهان ليكون بمثابة تمرين للقارئ . ومعطياته هي العناصر الآتية .

ابدأ من (ب ٣) وتقدم كالاتي مع إبراز المنسوخ الخاص بكل خطوة :

١ - (س (ص (ص (س (ل) [

٢ - (س (ص (ل) (ص (ل) (س (ل) [

٣ - (س (ص (ل) (ص (ل) (س (ل) [

٤ - (ص (ل) (س (ص) (س (ل) [

[(س (ص) (ص (ل) (س (ل) {]

٥ - (ص (ل) (س (ص) (س (ل) [

٦ - استخدم (٤)، (٥)، (ق ح ٣)

* * *

(ف ١٤) (س ٧ ص) (ص (س ٧ ص) [

(ف ٧)

١ - س (ص (ص (س (ل) [

٢ - (س ٧ ص) (ص (ص (ل) (س (ل) [

(١)، (ق ح ١)، (س ٧ ص/س)

$$٣ - (ب س ٧ - ص) \equiv (س ٠ ص)$$

(٢) ، (ق ح ٢) ، (تف ١)

...

$$(ف ١٥) (ب س ٠ - ص) \equiv (س ٠ ص)$$

$$(ف ١٦) (ب س ٧ - ص) \equiv (س ١٤ - ص)$$

$$(ف ١٧) ((س ٧ - ص) ٠ (س ٧ - ص)) \equiv ((س ٧ - ص) ٠ (س ٧ - ص))$$

وندع البراهين الخاصة بالتعريفات من ف ١٥ إلى ف ١٧ كتمرين يقوم به القارئ . ويوفر لنا تطبيق قاعدة الاستبدال بالنسبة إلى التعريفات (ف ١٤ ، ف ١٥ ، ف ١٦ ، ف ١٧) هذه العبارة :

$$(ب س ٧ - ص) \equiv (ب س ٠ - ص) \text{ وهكذا } \dots$$

...

برهان قانون الاطراد :

نحن الآن في وضع يسمح لنا بالبرهنة على حكم البداية رقم ٥ الذي يجدر بنا أن نستعيده الآن كالآتي :

لنفرض أنه توجد الصيغة \hat{A} (أ) التي تحتوى على الصيغة \hat{A} (أ) ولنفرض أنه قد تم الحصول على \hat{A} (ط) من \hat{A} (أ) بإحلال \hat{A} (ط) محل الموقع الذي تحتله \hat{A} (أ) في \hat{A} (أ) . وعلى ذلك فإذا كانت العبارة $\hat{A} \equiv \hat{A}$ (ط) صيغة مشتقة داخل ن ب فإن $\hat{A} \equiv \hat{A}$ (ط) هي كذلك صيغة مشتقة داخل ن ب .

البرهان :

القضية المفترضة (١) :

إذا كانت \hat{S} (\hat{h}) إحدى المتغيرات القضيةية S ، $ص$ ، $ل$. . .

ففي هذه الحالة تكون (\hat{h}) و (\hat{S}) نفس الشيء . وبالمثل تكون

$\hat{ط}$ ، $\hat{س}$ ($\hat{ط}$) نفس الشيء أيضاً . وعلى ذلك فإذا كانت $\hat{S} \equiv \hat{ط}$ صيغة مشتقة فكذلك تكون $\hat{S} (\hat{h}) \equiv \hat{س} (\hat{ط})$.

القضية المفترضة (٢)

إذا كان حكم البداهة صادقاً فيما يتعلق ببعض الصيغ $\hat{S} (\hat{h})$

فكذلك يصدق بشأن ($\hat{ب س} (\hat{h})$)

وما دام حكم البداهة صادقاً بشأن $\hat{S} (\hat{h})$

فسيستوفر لدينا أن $\hat{S} (\hat{h}) \equiv \hat{س} (\hat{ط})$ كصيغ مشتقة . وبالتالي تكون:

$$\hat{س} (\hat{h}) \equiv \hat{س} (\hat{ط})$$

وكذلك $\hat{س} (\hat{ط}) \equiv \hat{س} (\hat{h})$

صيغاً مشتقة أيضاً .

وبالاستبدال عن طريق (ف ١٢) نحصل على :

(س (أ) □ س (ط) ≡ (س (ط) □ س (أ))

کھینچ مشتقہ .

ونحصل بالاستخلاص على :

(ب س ط) (ب س ش) كصيفة مشتقة

وبالمثل نحصل على :

(ب س) (ه) : ب س (ط) كصيفة مشقة

وكذلك عن طريق الإضافة نحصل على :

(س) ≡ (ط) كُصِفَهِ مُشَقَّة .

• • •

القضية المفترضة (٣)

إذا كان حكم البداة صادقاً بالنسبة إلى بعض الصيغ ^أ سن ^أ (أ.هـ) فإنه يكون صادقاً أيضاً بالنسبة إلى أى صيغة من نوع صورة القضية :

٨ ٨ ٨
س (٨) ص

وبما أن حكم البداة يعد صادقاً بالنسبة إلى س^٨ (٥)

فإن س (هـ) = س (ط) ، س (ط) = س (هـ) تكونا صيغاً مشتقة .

وبالاستبدال في (ف ١٣) - نحصل على :

$$\begin{aligned} & (س^{\wedge} (ط^{\wedge}) \supseteq س^{\wedge} (ه^{\wedge})) \supseteq ((س^{\wedge} (ه^{\wedge})) \supseteq ص^{\wedge}) \supseteq (س^{\wedge} (ط^{\wedge})) \\ & (ص^{\wedge}) \end{aligned}$$

وبالاستخلاص نحصل على :

$$((س^{\wedge} (ه^{\wedge}) \supseteq ص^{\wedge}) \supseteq (س^{\wedge} (ط^{\wedge}) \supseteq ص^{\wedge})) \supseteq (ص^{\wedge}) \text{ كصيغة مشتقة .}$$

وبالمثل، [إذا استخلصنا $س^{\wedge} (ه^{\wedge}) \supseteq س^{\wedge} (ط^{\wedge})$] نحصل على :

$$(س^{\wedge} (ط^{\wedge}) \supseteq ص^{\wedge}) \supseteq (س^{\wedge} (ه^{\wedge}) \supseteq ص^{\wedge}) \supseteq (ص^{\wedge}) \text{ كصيغة مشتقة .}$$

ومن ثم نحصل بالإضافة على :

$$(س^{\wedge} (ه^{\wedge}) \supseteq ص^{\wedge}) \equiv (س^{\wedge} (ط^{\wedge}) \supseteq ص^{\wedge}) \supseteq (ص^{\wedge}) \text{ كصيغة مشتقة .}$$

• • •

القضية المفترضة (٤) :

إذا كان حكم البداهة صادقاً بشأن $س^{\wedge} (ه^{\wedge})$

فهو كذلك صادق بشأن أى صيغة من الصورة المنطقية

$$(ص^{\wedge} \supseteq س^{\wedge} (ه^{\wedge}))$$

وهنا أيضاً $س^{\wedge} (ه^{\wedge}) \supseteq س^{\wedge} (ط^{\wedge})$ وكذلك

$(س^{\wedge} (ط^{\wedge}) \supseteq س^{\wedge} (ه^{\wedge}))$ تكونان صيغتين مشتقتين .

وبالاستبدال في (ف ٢) نحصل على :

$$\begin{aligned} & (س \hat{\tau}) \sqsubseteq (س \hat{a}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau}) \sqsubseteq (س \hat{\tau}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau}) \\ & س \hat{a} \text{ كصيغة مشتقة .} \end{aligned}$$

وبالاستخلاص نحصل على :

$$\begin{aligned} & (ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{\tau}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{a}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{a}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{a}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{a}) \\ & وبالمثل (ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{a}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{\tau}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{\tau}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{\tau}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{\tau}) \\ & ومن ثم تكون :$$

$$(ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{a}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{\tau}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{\tau}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{\tau}) \sqsubseteq (ص \hat{\tau} \sqsubseteq س \hat{\tau})$$

ومن شأن هذه القضايا المفترضة أن تؤسس حكم البداهة الخاص بنا لأن كل صيغتنا يمكن بناؤها بواسطة المتغيرات القضية :

$$(\sqsubseteq) , (\sqsupset)$$

التي نحصل بواسطتها على :

$$(\sqsubseteq) , (\sqsupset) , (\equiv)$$

عن طريق التعريف حيثما كان ذلك ضروريًا .

* * *

برهان التمام بالنسبة إلى (ن ب) :

يكشف حكم البداهة رقم (٥) مع (ف ٧) ، (ف ١٤ - ١٧) عن أنه إذا كانت

$$س \hat{\tau}$$

يتم الحصول عليها عن طريق

$$س^{\wedge} (س^{\wedge})$$

إذا تم أداء أى عملية من العمليات المسلسلة من (١) إلى (س) فى حكم البداهة (٣) (١١) .

وعلى ذلك فإذا كانت $س^{\wedge} (س^{\wedge})$ صيغة مشتقة .

فكذلك $س^{\wedge} (ط^{\wedge})$. وعلينا أن نكافئ كلا من $(س^{\wedge})$ ، $(ط^{\wedge})$ على التوالى مع الطرفين الأيمن والأيسر فى أى متكافئة أخرى من المتكافئات (ف ١٤ - ١٧) نخذ مثلاً ما يلى :

$$ف ٧ (س \equiv س - س) (س)$$

ولنفرض أنه تتوافر لدينا الصيغة $س^{\wedge} (س^{\wedge})$ المشتقة التى تحتوى على (س)

فعلينا أن نبرهن على أن $س^{\wedge} (س - س) (س^{\wedge})$ صيغة مشتقة .

وعن طريق حكم البداهة رقم (٥) نجد أنه

$$إذا كانت (س^{\wedge} \equiv س - س) (س^{\wedge}) \text{ صيغة مشتقة}$$

فكذلك تكون

$$س^{\wedge} (س^{\wedge}) \equiv س^{\wedge} (س - س) (س^{\wedge}) \text{ صيغة مشتقة}$$

وعلى ذلك يتأسس حكم البداهة (٤)

ومن ثم أيضاً حكم البداهة رقم (٣)

(١) هذا مقابل ما هو موجود فى صفحات رقم ١١٨-١١٩ .

أى أنه بعبارة أخرى :

١ - كل الصيغ التي يمكن ردها إلى صيغة من صيغ الشرط المتصل المشتقة ذات الشكل المقبول العادى التي يطلق عليها اسم (ك م ع) هي صيغ اشتقاقية (١).

٢ - كل عبارات تحصيل الحاصل من الشكل (ك م ع) هي صيغ اشتقاقية.

٣ - كل عبارات تحصيل الحاصل يمكن ردها إلى صيغ تحصيل الحاصل من نوع (ك م ع).

وتمنحنا هذه الوقائع الثلاث حكم البداية الأخير الذي يخصنا وهو : حكم البداية رقم (٦)

كل عبارات تحصيل الحاصل مشتقة داخل ن ب .

* * *

٥ - شروط نسق البديهيات :

ذكرنا من قبل أننا قد نختار البديهيات التي تنشئ نقطة البداية في نسقنا بطرق كثيرة مختلفة . وبرغم ذلك قد لا يكون اختيارنا إلزامياً تماماً . فهناك اعتبارات معينة بعضها يجرى بحكم القبول وبعضها بحكم القسر والضرورة . وتؤدي هذه الاعتبارات إلى الحد من مجال اختيارنا . فمثلاً يكون استخدام عدد كبير لا حاجة إليه من البديهيات أمراً عجيباً لا يتناسب الموقف وأحياناً يكون باعثاً على النفور . وقد تصبح براهيننا معقدة بشكل لا حاجة بنا إليه ولا ضرورة تلزمنا به . وقد تصبح صعبة كذلك إذا ألزمنا أنفسنا بحدود عدد قليل جداً منها .

وأكثر من ذلك أنه يكون في العادة من المرغوب فيه اختيار البديهيات التي تحيل البراهين الخاصة بأحكام البداهة الهامة إلى براهين بسيطة ومباشرة .

ولكن بعض النظر عن هذه المتطلبات الاختيارية لعامل التوافق والبساطة فما لا غنى عنه في أي مجموعة من البديهيات أن تستجيب لمطالب هامة أخرى كثيرة . ومن الواضح بداهة مثلاً ضرورة أن تكون أي مجموعة نختارها من البديهيات متوافقة متماسكة حتى يستحيل استنباط أي أحكام بداهة متناقضة منها وإن لم يكن من الضروري ظهور السبب الأصلي . وتوجد من الناحية العملية ثلاثة شروط يلزم اتفاق أي نسق من أنساق البديهيات لها . وقد أشرنا من قبل بإيجاز إلى هذه الشروط ^(١) . وسبق أن قدمنا برهاناً عن اكتمال نسق البديهيات (ن ب) . غير أنه من اللازم الآن مناقشة هذه الشروط في تفصيل أكبر وإثبات أن (ن ب) يستوفي هذه الشروط الثلاثة ^(٢) .

التوافق Consistency :

يراعى أولاً وقبل كل شيء أن تكون مجموعة بديهياتنا متوافقة متماسكة . ويبدو واضحاً كما نوهنا من قبل أن هذا الشرط لا غنى عنه لأي مجموعة بديهيات . وإذا سألنا مستفسر : « لماذا لا أنتق وأستخدم مجموعة غير متوافقة من البديهيات ؟ » .

فإننا لن نحصل على إجابة واضحة مقنعة في آن معاً . فالسبب الذي يلزم من أجله أن تكون مجموعة البديهيات متوافقة متماسكة ما لم تكن كذلك هو إمكان البرهنة على أي قضية كانت داخل النسق .

ومن الممكن توضيح ذلك كالآتي :

(١) انظر الفقرة الثانية من هذا الفصل .

(٢) يلاحظ أن البراهين التالية هي من حيث جوهرها براهين هيلبرت وأكرمان (١٢) وقد حاولنا هنا تفصيلها بشكل ملحوظ حتى تكون صالحة لعرض أولى مبسطة .

دعنا نأخذ كمقدمات كبرى لأى برهان قضية ولتكن \hat{S} ونفيها $\neg \hat{S}$

١ - \hat{S} .

٢ - $\neg \hat{S}$.

فما دام قد ثبت صدق \hat{S} فالشرطية المنفصلة التى تترتب على \hat{S} من أى قضية أخرى \hat{V} ستكون أيضاً صادقة . أعنى إذا كانت \hat{S} صادقة فأى قضية شرطية منفصلة من \hat{S} ومن أى قضية أخرى ولتكن \hat{V} ستكون أيضاً صادقة . وعلى ذلك نستنبط القضية :

٣ - $\hat{S} \supset \hat{V}$ من (١)

ولكن $\hat{S} \supset \hat{V}$ مكافئة بالتعريف للقضية $\neg \hat{S} \supset \hat{V}$

وعلى ذلك تتوافر لدينا القضية :

٤ - $\neg \hat{S} \supset \hat{V}$ من (٣) بالتعريف

وكذلك إذا أخذنا (٢) مع (٤) وطبقنا قاعدة الاستخلاص نحصل على ما يلى :

٥ - \hat{S} من (٢) ، (٤)

وبذلك فالقضيتان المتناقضتان \hat{S} ، $\neg \hat{S}$ إذا أخذتا معاً كانتا كافيتين للبرهنة على أى قضية أخرى كانت لأن هذه هى ما كنا قد افترضنا أن \hat{S} تمثلها . ونستطيع الآن أن نرى أن السبب فى الاعتراض على عدم التوافق فى

أى مجموعة بديهيات هو أنها تعتمد إلى إلغاء التمييز بين الصيغ السليمة وبين القضايا المترتبة على ما قبلها المعروفة باسم القضايا ذات التكوين الصحيح (ق ت ص) وذلك يجعل أى قضية ذات تكوين صحيح (ق ت ص) قضية مشتقة داخل النسق . ويؤدى هذا إلى جعل النسق غير ذى نفع وغير ذى أهمية .

ولكن كيف نتأكد من أن إحدى المجموعات المعينة من البديهيات متوافقة أم غير متوافقة ؟

من الواضح أن استنباط أحكام البداهة من البديهيات سيكون غير عملي إلا إذا أدركنا حكم بداهة يناقض صيغة من الصيغ التى سبق تأسيسها بوصفها صيغة سليمة ، ذلك أننا لا نستطيع أن نتأكد إطلاقاً مهما واصلنا استدلالاتنا ما إذا كان التناقض لا يزال بسبيل الظهور أو أن البديهيات متوافقة فى نهاية الأمر .

ولحسن الحظ يوجد منهج أكثر عملية لتقرير ما إذا كانت البديهيات متوافقة أم لا . ونقوم بذلك اعتماداً على إجراء معادل لمنهج جدول الصديق الذى نقرر عن طريقه ما إذا كانت بعض القضايا ذات التكوين الصحيح (ق ت ص) الخاصة بحساب القضايا هى عبارات تحصيل حاصل أم لا . وفى العادة نقيم ما يسمى بالنموذج المحدود على النحو التالى : نضع المتغيرات القسوية س ، ص ، ل ، ٠٠٠ كأنها تحتل إحدى القيم العددية كما اعتدنا من قبل . ولكن لا حاجة بنا على أى حال إلى أن نفسر هذه القيم كما فعلنا من قبل عندما نظرنا إلى « ١ » بوصفها علامة تمثل الصديق وإلى « ٥ » بوصفها علامة تمثل الكذب . بل نكتفى بالنظر إلى كل متغيرة على أنها واحدة (وواحدة فقط) من القيمتين ١ . ٢ فى أى مناسبة خاصة من المناسبات التى تجرى فيها .

ودعنا نذهب أبعد من ذلك إلى تعريف « ١ » بأنها « ٢ » وتعريف « ٢ » بأنها « ١ » كالآتي :

٢	١
٢	١
١	٢

(١)

ونقوم ثانياً بتعريف قيم القضايا المركبة المترابطة بواسطة الثابتة « ٧ » ناظرين إليها كعامل يقارب علامة الضرب من حيث وضعها الشكلي في الحساب بحيث نستطيع بناء جدول ضرب خاص بها كالآتي :

$$١ = ١ \vee ١ \quad (ب)$$

$$٢ = ٢ \vee ١$$

$$٢ = ١ \vee ٢$$

$$٢ = ٢ \vee ٢$$

ولعله أكثر دقة وملاءمة أن نكتبها كالآتي :

٢	١	٧
٢	١	١
٢	٢	٢

وإذا استخدمنا الجداول (١) ، (ب) أمكننا تقويم أى قضية من (ق ت) وتحديدًا بإحدى القيمتين (١) أو (٢) داخل كل مجموعة من القيم الخاصة بالمتغيرات القضية . مثال ذلك :

س	ص	س	ص	س	ص
١	١	٢	٧	١	٢
١	٢	٢	٧	٢	٢
٢	١	١	٧	١	١
٢	٢	١	٧	٢	٢

وعلى ذلك فإن (س س ٧ ص) تكون قيمتها (٢) فى ثلاث حالات من أربع حالات ممكنة وتكون قيمتها (١) فى الحالة الواحدة المتبقية حيث س = ٢ ، ص = ١ .

والآن فلنقم بهذه الوسيلة بتقويم البديهيات التى انتقيناها فيما سبق . فسوف يكون من الضرورى أولاً وقبل كل شئ أن نضعها فى حدود أو عبارات تتضمن كلام من (س) ، (٧) كالتالى :

(ب ١) (س ٧ س) س

وتصبح س (س ٧ س) ٧ س

(ب ٢) ص (س ٧ ص)

وتصبح س ص (س ٧ ص)

(ب ٣) (س ٧ ص) (س ٧ س)

وتصبح س (س ٧ ص) ٧ (س ٧ س)

(ب ٤) (ص ٤ ل) ٤ ((س ٧ ص) ٤ (س ٧ ل))
 وتصبح ١ ص ٧ ل ٧ (١ ص ٧ ص) ٧ (س ٧ ل)

والآن نقومها وفقاً لجداول (١) ، (ب) السابقة كالآتي :

(ب ١)

١ (س ٧ ص) ٧ س					
٢	١	١	١	٢	١
١	٢	٢	٢	٢	٢

(ب ٢)

١ ص ٧ (س ٧ ص)					
٢	١	٢	٢	١	١
١	٢	٢	٢	٢	٢
١	٢	٢	٢	٢	٢
٢	١	٢	٢	٢	٢

(ب ٣)

١ (س ٧ ص) ٧ (ص ٧ س)							
٢	١	١	١	٢	١	١	١
١	٢	٢	٢	٢	٢	٢	١
١	٢	٢	١	٢	٢	٢	١
١	٢	٢	٢	٢	٢	٢	١

(ب ٤) (ب ص ٧ ل) ٧ (ب (س ٧ ص) ٧ (س ٧ ل)

١	٢	١	٢	١	١	١	٢	٢	٢
١	٢	١	٢	١	١	١	٢	٢	٢
٢	١	٢	١	١	١	١	٢	٢	٢
١	١	٢	١	١	١	١	٢	٢	٢
١	٢	١	٢	١	١	١	٢	٢	٢
١	٢	١	٢	١	١	١	٢	٢	٢
١	٢	١	٢	١	١	١	٢	٢	٢
١	٢	١	٢	١	١	١	٢	٢	٢
١	٢	١	٢	١	١	١	٢	٢	٢
١	٢	١	٢	١	١	١	٢	٢	٢

وسوف يتضح أن كل بديهية تأخذ القيمة (ب) فقط . والآن إذا أوضحنا أن هذه الخاصية تبقى على حالها عندما تتعرض البديهيات لقواعد التحويل النسقية فالنتيجة هي أن كل أحكام البداهة التي يمكن استنباطها من البديهيات تتخذ بالمثل القيمة (ب) فقط . وإذا كان ذلك كذلك فإن أى حكمين متناقضين من أحكام البداهة لن يمكن البرهنة عليهما داخل النسق . وذلك لأن أى حكمين متناقضين من أحكام البداهة . . إذا اتخذ أحدهما القيمة (ب) فلا بد أن يتخذ الثانى القيمة (١) طالما كانت (ب = ٢ = ١) . وعلينا أن نوضح أن الخاصية التي تتميز بها البديهيات في أنها تتخذ القيمة (ب) فقط لا تتغير بتطبيق قواعد التحويل النسقية .

ومن السهل أن نظهر أن قاعدة التحويل بالاستبدال (ق ح ١) وقاعدة التحويل بالنقل (ق ح ٢) لا تؤثران على هذه الخاصية . ففي حالة (ق ح ٢) وهي قاعدة النقل بالتعريف تكون النتيجة واضحة . وبما أن (س^٨ ب ص) مثلا يتم تعريفها كمكافئة لعبارة (ب س^٨ ٧ ص) فإن استبدال (س^٨ ب ص)

بالعبارة (β $\overset{\wedge}{\text{س}}$ $\overset{\wedge}{\text{ص}}$) لا يمكن أن يؤثر على أى قيمة من القيم المقدرة فى أى تعبير معين . والحالة مماثلة بالنسبة إلى المتكافئات الأخرى المحددة . ومن الصعب ألا يكون واضحاً أن أى تعبير ناشئ عن تطبيق (ق ح ١) على أى بديهية من البديهيات لا يستطيع أن يتخذ قيمة أخرى عدا (β) . ذلك أن المنهج الذى قومنا به البديهيات وأكدنا أنها تتخذ القيمة الثابتة ٢ عن طريقه يضمن أننا حسبنا حساب كل التآليفات الممكنة من القيم الخاصة بالمتغيرات القضية الفردية . ويمكن أن ينتج استبدال متوافق لقضية ذات تكوين صحيح (ق ت ص) خاصة بمتغيرة قضوية معينة خلال إحدى البديهيات بما يتفق مع (ق ح ١) ضمن بديهية تحمل القيمة (١) على شرط واحد . وهذا الشرط هو أن مثل هذا الاستبدال يمكن أن يزيد عدد التآليفات أو المجموعات الخاصة بالقيم (١) ، (٢) المتضمنة فى تقويم التعبير . وهذا مستحيل ما دام المنهج الذى استخدمناه يحسب حساب كل التآليفات الممكنة .

ويمكننا أن نرى أيضاً أن تطبيق قاعدة الاستخلاص (ق ح ٣) على أى صيغتين سليمتين لا يمكن أن ينتج عن تأسيس صيغة قيمتها (١) بالنسبة إلى أى تآليفات من المتغيرات القضية المكونة لها . وذلك لأن أى صيغ يتم استنباطها استنباطاً سليماً من البديهيات بتطبيق (ق ح ٢) ستكون قيمتها كما رأينا (٢) فقط . وإذا استنبطنا ($\overset{\wedge}{\text{ص}}$) كقضية تالية مترتبة على تأسيس الصيغتين ($\overset{\wedge}{\text{س}}$) ، ($\overset{\wedge}{\text{س}}$ β $\overset{\wedge}{\text{ص}}$) فقد نناقش الأمر كالاتى من أجل إظهار أن ($\overset{\wedge}{\text{ص}}$) لا بد أن تتخذ القيمة (٢) دون سواها . فكلما من ($\overset{\wedge}{\text{س}}$) ، ($\overset{\wedge}{\text{س}}$ β $\overset{\wedge}{\text{ص}}$) إذا تأسستا كصيغ سليمة كانت لهما قيمة واحدة فقط هى (٢) . فإذا كانت

$$\overset{\wedge}{\text{س}} = 2$$

$$\text{كانت } \beta \overset{\wedge}{\text{س}} = 1$$

وعلى ذلك فإذا كانت

$$\begin{matrix} \wedge & \wedge \\ \text{س} & \vdash \text{ص} \end{matrix}$$

$$\text{مكافئة لعبارة } \vdash \begin{matrix} \wedge \\ \text{س} \end{matrix} \vee \begin{matrix} \wedge \\ \text{ص} \end{matrix}$$

$$\text{وكانت } \vdash \begin{matrix} \wedge \\ \text{س} \end{matrix} \vee \begin{matrix} \wedge \\ \text{ص} \end{matrix} \text{ تتخذ القيمة (٢)}$$

$$\text{وكانت } \vdash \begin{matrix} \wedge \\ \text{س} \end{matrix} \text{ تتخذ القيمة (١)}$$

فلا بد أن تكون قيمة $\begin{matrix} \vee \\ \text{ص} \end{matrix}$ هي (٢)

() وإذا لم تتخذ $\begin{matrix} \wedge \\ \text{ص} \end{matrix}$ القيمة (٢) يكون

$$2 = 1 \vee 1$$

وهو عكس ما تقرر في تعريفاتنا (

وفي آخر الأمر يمكننا أن نظهر أن قاعدة الإضافة (ق ح ٤) إذا جرى تطبيقها على أى صيغتين سليمتين فإنها لا يمكن أن تنتج عن عملية وصل الصيغتين حاملة القيمة (١) . أو بعبارة أخرى علينا أن نظهر أنه إذا كانت

$$\text{كل من } \begin{matrix} \wedge \\ \text{س} \end{matrix}, \begin{matrix} \wedge \\ \text{ص} \end{matrix} \text{ تتخذ القيمة (٢) فلا بد أن تتخذ } \begin{matrix} \wedge \\ \text{س} \end{matrix}, \begin{matrix} \wedge \\ \text{ص} \end{matrix} ($$

$$\text{كذلك القيمة (٢) . ومن المعروف أن } \begin{matrix} \wedge \\ \text{س} \end{matrix}, \begin{matrix} \wedge \\ \text{ص} \end{matrix} \text{ تكافئ العبارة :}$$

$$\vdash \begin{matrix} \wedge \\ \text{س} \end{matrix} \vee \begin{matrix} \wedge \\ \text{ص} \end{matrix}$$

وبالتالى فإن (٢ . ٢) تكافئ العبارة :

$$\vdash \begin{matrix} \wedge \\ \text{س} \end{matrix} \vee \begin{matrix} \wedge \\ \text{ص} \end{matrix} \vee \begin{matrix} \wedge \\ \text{ص} \end{matrix}$$

وهذه بدورها تكافئ $\vdash \begin{matrix} \wedge \\ \text{س} \end{matrix} \vee \begin{matrix} \wedge \\ \text{ص} \end{matrix}$ أى (١) وهو نفس الشيء (٢)

وعلى ذلك لا يمكن أن ينتج أى تطبيق لقواعد التحويل الخاصة بالنسق

على البديهيات الأربع أو على أى عبارات يمكن استنباطها منها ... لا يمكن أن ينتج مثل ذلك فى أحد التعبيرات التى تتخذ القيمة (٢ -) أو (١) فقط . وبالتالي فالبديهية تتسم بالتوافق .

الاستقلال Independence :

تكون مجموعة البديهيات مستقلة إذا لم تيسر البرهنة على أى واحدة من بين هذه المجموعة كحكم من أحكام البداهة اعتماداً على بعض البديهيات الأخرى أو عليها كلها داخل المجموعة . وليس عيباً جذرياً من وجهة نظر المنطق فى نسق البديهيات إذا لم تكن البرهنة على استقلال البديهيات ميسورة . وبرغم ذلك فهو عيب من وجهة نظر الحرص على التوافق الشكلى والاقتصاد إذا تم استخدام أحد التعبيرات - مما يمكن استنباطه فى الواقع كأخذ أحكام البداهة استخداماً يشير إلى أنه نقطة ابتداء غير مبرهنة . ولهذا السبب يحاول المناطق دائماً تأمين استقلال البديهيات التى يختارونها كنقطة ابتداء لم بهذا المعنى .

ولكن كيف يمكننا تأكيد ما إذا كانت هذه البديهيات مستقلة فى الحقيقة أم لا ؟ من الواضح أنه ليس عملياً فى شيء أن نبرهن على استقلال (ب ٤) مثلاً عن (ب ١ - ٣) بمحاولة البرهنة على (ب ٤) من (ب ١ - ٣) مستدلين بفشلنا كبرهان على الاستقلال . وقد لاحظنا من قبل عند معالجة موضوع التوافق أنه لا يمكننا إطلاقاً أن نتأكد مهما دأبنا استخدام مثل هذا المنهج أن (ب ٤) صحيحة أو أن البرهنة على صحتها ممكنة : وأكثر من هذا أن منهج بناء النماذج والأنماط المحدودة يوفر لنا أداة مباشرة لاكتشاف ما إذا كانت البديهيات التى نختارها كنقط للابتداء فى نسقنا مستقلة بعضها إزاء البعض الآخر . فنحن نتقدم كما فعلنا من قبل بواسطة إعطاء قيم عديدة إلى المتغيرات القضيةوية التى تشتمل على البديهيات بحيث تستنفد كل التاليفات الممكنة من الأرقام التى

تعزى وتعطى إلى المتغيرات . وفي مقدورنا بناء جداول تظهر أثر العوامل (ب) ،
(٧) على القيم المنسوبة إلى المتغيرات ،

دعنا أولاً نبرهن على استقلال (ب ١) بالنسبة إلى (ب ٢) ، (ب ٣) ،
(ب ٤) . فنقيم « مصادرة » مؤداها أن المتغيرات القضيوية قد تأخذ واحدة من
القيم التالية : ٥ ، ١ ، ٢ . وستؤخذ أوستفهم المفاعلات (ب) ، (٧) على
النحو التالي (١) ،

ب	٧
١	٥
٥	١
٢	٢

٢	١	٥	٧
٥	٥	٥	٥
٢	١	٥	١
٥	٢	٥	٢

وعلى ذلك فمثلاً ٥ = ١ ب

وكذلك ٢ = ٢ ب

وكذلك ٥ = ٥ ٧ ٢

وكذلك ٢ = ١ ٧ ٢

وهكذا .

ونستطيع الآن تقويم البديهيات من (ب ١) إلى (ب ٤) كالآتي بعد

(١) يلاحظ أننا نستخدم الصفر بشكله الإفرنجي تسهيلاً للقراءة والعمل به .

تقريرها وسردها أولا على نحو ما جرى في برهان التوافق بنفسى حدود الثوابت
(ب) ، (٧) .

(ب ١)

س	٧	(س ٧ س)			
٠	٠	٠	٠	٠	١
١	٠	١	١	١	٠
٢	٢	٢	٠	٢	١

(ب ٢)

(س ٧ س)			٧	س	
٠	٠	٠	٠	٠	١
١	٠	٠	٠	١	٠
٢	٠	٠	٠	٢	٢
٠	٠	١	٠	٠	١
١	١	١	٠	١	٠
٢	٢	٢	٠	٢	٢
٠	٠	٢	٠	٠	١
١	٢	٢	٠	١	٠
٢	٠	٢	٠	٢	٢

(ب ۳) م (س ۷ ص) ۷ (ص ۷ س)

۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰
۱	۰	۰	۲	۰	۲	۰	۰
۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۱	۰	۱	۱	۱
۲	۱	۲	۲	۰	۲	۲	۱
۱	۲	۰	۰	۰	۰	۰	۲
۲	۲	۱	۰	۰	۱	۲	۲
۱	۲	۰	۲	۰	۲	۰	۲

وسيتضح بالموازنة بين هذه الجداول أن (ب ٢) ، (ب ٣) ، (ب ٤) تأخذ القيمة (0) فقط في حين تأخذ (ب ١) إلى جانب القيمة السابقة القيمة (٢) أيضاً (وتأخذ في حالة أن تكون س = ٢) وقد ظهر فيما سبق في برهان التوافق أن تطبيق قواعد التحويل على البديهيات لا يمكن أن ينتج في الصيغ السليمة المستنبطة على هذا النحو بقيمتها الجديدة . وعلى ذلك فلا يمكن أن تعطى الاستنباطات من (ب ٢) إلى (ب ٤) أى تعبير يأخذ إحدى القيم الأخرى غير القيمة (0) . وبالأخص لا يمكن استنباط (ب ١) على هذا النحو . وبذلك يصبح استقلال (ب ١) من (ب ٢) ، (ب ٣) ، (ب ٤) مبرهنًا عليه .

وبمثل هذه المناهج وما يشابهها يمكن إقامة استقلال البديهيات الأخرى ولكن لن يكون من الضروري إبراز التفاصيل الخاصة بالتقويمات . (وعلى القارئ أن يقوم بها بنفسه للمعان) وقد نبرهن على استقلال (ب ٢) عن طريق تقويم البديهيات وفقاً للجداول الآتية :

(ج)	
١	٠
٢	٠
١	١
٠	٢

(د)			
١	٢	١	٠
٠	٠	٠	٠
٢	١	٠	١
٢	٢	٠	٢

ويعطينا تقييم البديهيات فيما يتفق مع هذه الجداول النتائج الآتية :

(ب ١) ، (ب ٣) ، (ب ٤) تصبح إما صحيحة أو غير صحيحة
فتأخذ التقييم الجدولي (0) أو (١) . ولكن (ب ٢) تأخذ القيمة (٢) بالإضافة
إلى ما تقدم من التقييم « (ذلك أن س = ٢ ، ص = ١) . وعلى ذلك فإن
(ب ٢) مستقلة في الواقع عن البديهيات الثلاث الأخرى .
ويمكن توضيح استقلال (ب ٣) بواسطة تقييم البديهيات بما يتفق مع
الجداول الآتية :

(ل)

١	٠
١	٠
٠	١
٠	٢
٢	٣

(م)

٣	٢	١	٠	٧
٠	٠	٠	٠	٠
٣	٢	١	٠	١
٠	٢	٢	٠	٢
٣	٣	٣	٠	٣

ويقدم لنا هذا النموذج القيمة (0) وجدها بالنسبة إلى (ب ١) ، (ب ٢)
(ب ٤) ولكن (ب ٣) تأخذ كذلك القيمة (٣) أيضاً في الحالة التي تكون
فيها س = ٢ وتكون فيها ص = ٣ . ذلك أننا نملك ههنا ما يلي :

$$٣ = (٣ \vee ١) = (٣ \vee ٠ \neg) = ((٢ \vee ٣) \vee (٣ \vee ٢) \neg)$$

ومن الضروري هنا مراعاة أن المتغيرات الفئوية كما هو موضح في هذا النموذج تستطيع أن تأخذ أى قيمة من القيم الأربع ٠ - ١ - ٢ - ٣ فضلاً عن أن جداول التقويم هي نسبياً أكثر تعقيداً في الواقع . ونحن بحاجة إلى أربعة أسطر بالنسبة إلى (ب ١) وستة عشر (أو ٢٤) سطراً بالنسبة إلى (ب ٢) ، (ب ٣) وأربعة وستين (٢٤) سطراً بالنسبة (ب ٤) التي تشتمل على ثلاثة متغيرات فئوية س ، ص ، ل .

وفي النهاية يمكن إبراز استقلال (ب ٤) بواسطة نموذج مبنى على النحو التالي :

(ن)				س
				ص
٠	١	٢	٣	٤
٠	١	٢	٣	٤
٠	١	٢	٣	٤
٠	١	٢	٣	٤

وفي هذا النموذج يمكن أن نأخذ كل من (ب ١) ، (ب ٢) ، (ب ٣) قيمة واحدة فقط هي (٠) في حين تأخذ (ب ٤) القيمة (٢) إذا كان س = ل = ٢ وكان ص = ١ .

وعلى ذلك نجد لدينا :

$$\sim (\sim (٢٧١) \vee (١٧٢)) \vee (٢٧٢)$$

$$(272) \vee 0 \sim = (270 \sim) \vee (271) \sim = \\ 2 = 272 = 270 \sim =$$

التام Completeness :

يمكن شرح التام فيما يتعلق بمجموعة من البديهيات بطريقتين :

أولاً : تكون مجموعة البديهيات كاملة إذا قامت بتكوين أساس كاف للبرهنة على كل عبارات تحصيل الحاصل الخاصة بالنسق . وسبقت البرهنة على أن (ن ب) تام بهذا المعنى .

ثانياً : يكون المعنى الثانى (والأقوى) فيما يتعلق بالتام هو كالاتى : تكون مجموعة البديهيات تامة إذا أدت إضافة بديهية مستقلة أخرى إليها إلى عدم التوافق بداخل هذه المجموعة .

ويمكننا أن نبرهن على أن (ن ب) تام بالمعنى الثانى أيضاً على النحو التالى . نفرض أن (س^٨) هى أى (ص س) لا يمكن البرهنة عليها من البديهيات . فسيترتب على ذلك حصول هذه العبارة (س^٨) على شكل مقبول عادى (ك م ع) خاص بالوصل يمكن أن نسميه (ص^٨) . وستكون (ص^٨) إحدى الصيغ ذات الشكل :

$$ل_1 \cdot ل_2 \cdot ل_3 \cdot \dots \cdot ل_n$$

حيث تكون مجموعة « اللامات » (حرف اللام) شرطيات منفصلة خاصة بالمتغيرات القضيوية المنفية والمثبتة . ولكن لما كانت (س^٨) وكذلك (ص^٨) بالتالى لا يمكن البرهنة عليها من البديهيات فلا بد أن تحتوى (ل) واحدة على الأقل من بين هذه اللامات على مكونات غير متناقضة فيما بين بعضها وبعض .

ولنطلق على هذه العبارة الخاصة بالفصل هذه العلامة « ل كاف » . وبإمكاننا

القيام بعملية استبدال توافق إزاء (ل كاف) وفقاً للقاعدة (ق ح ١) .
 فنستبدل كل متغير قضوى غير منى بالعلامة « س » ونضع (ن س) محل كل
 متغير قضوى فى حالة نى . فمثلاً إذا كانت ل كاف هى :

(س ٧ ٧ ص ٧ ل ٧ ٧ م)

ويتطبيق الاستبدالات نحصل على الآتى :

(س ٧ ٧ ٧ س ٧ س ٧ ٧ س)

وهذه تكافئ بدورها

(س ٧ س ٧ س ٧ س)

وهذه أيضاً تكافئ (س)

ولكن إذا كان مفترضاً أن (س^١) صيغة سليمة فستكون (ص^١) إذن
 وبالتالى (ل كاف) صيغاً سليمة . وما دام من الممكن كتابة (ل كاف) كما
 لو كانت (س) عن طريق استبدال التوافق ، فستكون (س) إذن صيغة سليمة .
 ولا يمكن أن يكون ذلك هو الوضع لأنه سيكون من الممكن عن طريق استبدال
 توافق آخر مسموح به بالمثل ومتفق تماماً مع (ق ح ١) .. سيكون من الممكن
 بذلك كتابة (س ٧) فيما يتعلق بكل متغير قضوى غير منى فى (ل كاف)
 وكتابة (س) فيما يتعلق بكل متغير منى بحيث نحصل على :

(س ٧ س ٧ س ٧ س ٧ س)

التي تكافئ (س ٧) . وعلى ذلك فافتراض أن (س^١) لا يمكن البرهنة
 عليها اعتماداً على البديهيات وأنها برغم ذلك صيغة سليمة . . . هذا الافتراض
 يسوق إلى النتيجة أن كلا من (س) ، (س ٧) صيغ سليمة . وهذا تناقض .
 وعلى هذا فالبديهيات من (ب ١) إلى (ب ٤) تامة بمعنى أنه إذا أضيفت إليها
 أى بديهية مستقلة نشأ عن ذلك تناقض .

« وعلى القارئ أن يتحقق بنفسه من أنه يمكن إجراء زوج مماثل من الاستبدالات

على إحدى بديهيات (ن ب) - أو على أى حكم من أحكام البداهة التى تترتب على البديهيات - بما يتفق مع (ق ح ١-١) .

مراجع الفصل الرابع :

يمكن العثور على تقرير أولى واضح عن تطور منهج البديهيات الخاص بحساب القضايا فى كتاب أمبروز ولازيروفيتس (١) ولكن بدون ذكر لبراهين التوافق والتمام والاستقلال . توجد معالجة أولية ممتازة من وجهة نظر أكثر تعميماً فى كتاب تارسكى (٣١) . ويمكن الوقوف على تناول تقليدى للموضوع أيضاً فى كتاب هيلبرت وأكرمان (١٢) . ويقدم إيتون (١٠) تقديماً بسيطاً إلى منهج البديهيات كما عرضه كتاب رسل وهوايتهد عن مبادئ الرياضيات المعروف باسم برنكييا ماتيماتىكا (٣٣) .

الفصل الخامس

عناصر حساب المحمول^(١)

١ - بعض صور جديدة للاستدلال :

هناك عدد كبير من صور الاستدلال التي تعد تامة البساطة وواضحة السلامة المنطقية ، غير أن سلامتها لا يمكن أن تنبنى على مناهج تحليل صدق الدوال التي سبق أن عالجناها في الفصلين الثاني والثالث . وهاك أمثلة على ذلك :

١ - يدفع جميع الأعضاء العاديين في الجمعية اشتراكاً سنوياً قدره جنيه واحد ، وكل من يدفع اشتراكاً سنوياً قدره جنيه واحد يتسلم مطبوعات الجمعية بدون أى التزامات مالية جديدة . إذن فكل الأعضاء العاديين في الجمعية يتسلمون مطبوعات الجمعية بدون التزامات مالية جديدة .

٢ - كل رجال الإرساليات الدينية أصحاب نظرات صارمة في الأخلاق ، ولا تتوافر في أحد أصحاب النظرات الصارمة في الأخلاق صفات الباحث الجيد في علوم الإنسان . إذن مستحيل أن يصبح أحد رجال الإرساليات الدينية باحثاً جيداً في علوم الإنسان .

٣ - من حق كل طلاب الجامعة استخدام مكتبة الجامعة ، وليس بعض الطلاب من الراغبين في المنح المالية . إذن فبعض من لهم الحق في استخدام مكتبة الجامعة ليسوا راغبين في المنح المالية .

(١) ننصح بقراءة فصل كم المحمول في كتاب الدكتور عبد الرحمن بدوى (ص ٢٢٦) المنطق الصورى والرياضى ، قبل قراءة هذا الفصل . (المترجم) .

ويلاحظ أن سلامة هذه الاستدلالات من الناحية المنطقية تتوقف فيما يبدو بشكل من الأشكال على استعمالات الألفاظ « كل » ، « بعض » ، « لا أحد » والتعبيرات المعادلة لها ، كما تتوقف على الطريقة التي تستخدم بها بعض العبارات الوصفية المعينة (مثل « عضو عادي » ومثل « يدفع اشتراكاً سنوياً قدره جنيه واحد » وما شابه ذلك) في ربط المقدمات بالنتيجة . ومن الواضح أن الحجج التي من هذا النوع لا تكون صحيحة أو سليمة منطقياً إلا إذا كان ربط المقدمات بالنتيجة مستوفياً بعض الاشتراطات . ولا بد أن يكون هدفنا إذن تعيين هذه الاشتراطات تعييناً صحيحاً . ونأمل بذلك الحصول على إجراء عملي آلي من أجل اختبار مثل هذه الحجج . وسوف يكون ذلك مفيداً في الحجج الأشد تعقيداً التي لا يكون فيها الحدس البديهي دليلاً مبرراً من الخطأ . وسيكون هذا الإجراء العملي الآلي بطبيعة الحال بمثابة منهج القرار القاطع المماثل لمنهج جداول الصدق أو الصيغ العادية التي تكلمنا عنها في الفقرة السابعة من الفصل الثالث .

وقد يكون مفيداً هنا أن نعيد الإشارة إلى المثالين اللذين ناقشناهما في بداية الفصل الثاني من أجل إبراز الطابع الأساسي للحجج التي سنضعها الآن موضع الاهتمام .

٤ - كل المهن الخطرة تتكلف مرتبات باهظة .

العمل في المناجم مهنة خطيرة .

إذن فالعمل في المناجم يتكلف مرتبات باهظة .

٥ - إذا كان العمل في المناجم مهنة خطيرة كانت مرتباته باهظة .

والعمل في المناجم مهنة خطيرة .

إذن فلا بد أن يكون العمل بالمناجم ذا مرتبات باهظة .

وقد رأينا أن مضمون هاتين الحججتين هو نفس الشيء وأن نتيجتهما

متكافئتان . وبرغم ذلك فهما مختلفتان اختلافاً أساسياً من حيث الطابع المميز لكل منهما من وجهة النظر المنطقية . ففى إمكاننا فى الحالة رقم (٥) أن نتجاهل بناء القضايا الآتية .

« العمل فى المناجم مهنة خطيرة »

و « لابد أن يكون العمل بالمناجم ذا مرتبات باهظة »

وأن نعمل إلى اختبار سلامة الهيكل المنطقى المقابل لها .

٦ - (س) (ص . س) (ص)

ولكننا لا نستطيع أن نفعل نفس الشيء فى الحالة رقم (٤) . فسيكون البناء المنطقى للبرهان أو للحجة ، إذا انتبهنا إلى القضايا المتضمنة وحدها لا إلى الحدود الوصفية التى تتألف منها القضايا ، كالآتى :

٧ - (س . ص) (ص) ل

وهذه ليست بالصيغة السليمة كما هو واضح . أو بعبارة أخرى لا تكون الحجة المنطقية من هذا الشكل صحيحة أو سليمة لمجرد كونها بهذه الصورة . إذ أنه من الواضح أن إخفاقنا فى تقدير البناء الداخلى للقضايا من النوع رقم (٤) أى :

« كل المهن الخطرة ذات مرتبات باهظة »

وما إلى ذلك ، قد أدى إلى فقداننا وجهة النظر المنطقية الأساسية الخاصة بالحجة المنطقية . إذن لو كان علينا تقديم حساب عن سلامة الحجج المنطقية من نوع :

كل أ هى ب

وكل س هى أ

إذن س هى ب

لكان من الضروري أن ننظر في بناء تلك القضايا التي اتخذناها سلفاً على أنها وحدات بغير تحليل .

٢ - القضايا المفردة :

فإذا كان علينا استيفاء برنامجنا وجب علينا الآن النظر في أمر تحليل القضايا إلى عناصر ليست هي نفسها قضايا . وفي هذا تعارض ملفت للنظر مع إجرائنا السابق الذي اعتبرت فيه القضايا إما كقضايا مركبة من قضايا أخرى أو كعناصر لا تقبل النقصان . ونبدأ بأبسط أنواع القضايا وهي القضايا المفردة . وقد تعرف القضية المفردة سلباً بأنها القضية التي لا تحتوى على روابط دوال الصدق (أو الثوابت المنطقية) والتي لا يوجد فيها أيضاً ألفاظ مثل « كل » ، « لا واحد » ، « بعض » ومعادلاتها . وهاك بعض أمثلة من القضايا المفردة :

١ - حسن شجاع

٢ - حسن أكبر سنّاً من محمد

٣ - الإسماعيلية بين السويس وبور سعيد

ومن الواضح أن نتيجة تحليل هذه القضايا لن تكون قضايا أخرى وإنما هي شيء آخر سنطلق عليه عامة اسم الحدود . مثال ذلك القضية رقم (١) تحتوى على حدين هما « حسن » ، « شجاع » ، وفي المثل رقم (٢) ثلاثة حدود هي « حسن » ، « محمد » ، « أكبر سناً من » . وفي المثل رقم (٣) أربعة حدود هي « الإسماعيلية » ، « السويس » ، « بور سعيد » ، « بين » . ويمكننا أن نتخيل قضايا تحتوى على أكثر من أربعة حدود برغم أنها ليست مألوفة إلى درجة كبيرة عملياً . على أي حال سوف نغنى في هذا الفصل فقط بالقضايا المفردة التي تحتوى على حدين فقط مثل

القضية (١) . وتقدم القضايا المفردة الأكثر تعقيداً تعقيدات لا تتناسب مع التناول الأولى للموضوع .

ودعنا ننظر الآن في بعض الأمثلة الأخرى من القضايا المفردة التي تحتوى على حدين فقط :

٤ - (حسن) (شجاع)

٥ - (لندن) (أكبر المدن)

٦ - (أنديرا غاندى) (رئيسة الوزارة الهندية)

٧ - (إيطاليا) (دولة ذات مناخ دافئ)

وفي كل حالة من الحالات وضعنا علامات على الحدين . وسوف نرى في كل حالة أن أحد الحدين اسم علم والآخر صفة أو عبارة . ويعرف الاسم العلم بأنه الموضوع المنطقي في القضية كما تعرف الصفة أو العبارة بأنها المحمول المنطقي (سيلاحظ القارئ أن هذه الحدود مكيفة من الحدود الفنية في النحو . وعلى أى حال توجد اختلافات ذات شأن بين الموضوع في النحو وفي المنطق وكذلك بين المحمول في النحو وفي المنطق . ولا ينبغي الذهاب إلى حد الاعتقاد بأن الموضوع المنطقي في قضية معينة هو عين المبتدأ في العبارة المماثلة أو أن المحمول المنطقي هو عين المحمول النحوي للعبارة المسألة . وسوف يبقى الأمر في الواقع على هذا النحو دائماً بلا اختلاف) . ونوضح من الأمثلة المعطاة أن القضية المفردة تقول إن شيئاً معيناً مخصصاً باسم علم يحقق وصفاً بعينه . وستصبح القضية صادقة إذا كان الشيء في الواقع يحقق الوصف بل إذا كان يحققه فقط . وسنطلب فيما سوف يتبع هذا إنشاء قضايا تكون صادقة بشأن أى قضايا مفردة مفروضة قسراً . وعلى ذلك فسنستخدم مثل هذه الأحرف :

« أ » . « ب » ، « ج »

(أو « أ_١ » ، « أ_٢ » ، « أ_٣ » ...)

لتقوم مقام أسماء العلم المفروضة قسراً ، وسنستخدم الأحرف :
 « ف » ، « ل » ، « ط » لتقوم مقام المحمولات ، وسنطلق اسم « الثوابت
 الفردية » على الأحرف « أ » ، « ب » ، « ج » التي تقوم بهذه الطريقة
 مقام أسماء العلم . أما الأحرف « ف » ، « ل » ، « ط » فسوف يطلق عليها
 اسم « ثوابت المحمول » . وسينم وضع القضايا المفردة المفروضة قسراً في رموز
 عن طريق تأليفات مثل « ف أ » ، « ل أ » ، « ط ب » وهكذا إلى آخره .
 وعلى ذلك سوف نفهم التعبير الرمزي « ف أ » على أنه يقرأ كالاتي :

(أ تتصف بالصفة ف)

حيث تقوم « أ » كما هو مفهوم بوظيفتها كاسم علم .
 هذه التأليفات من الحروف وبعض التأليفات الأخرى التي ستقدم فيما بعد
 تسمى صيغ المحمول . (وسيشار إليها للاختصار باسم « الصيغ » حيثما - كما
 هو الحال عادة في الفصل الحالي - لم يوجد أي خطر من الخلط بينها وبين
 صيغ القضايا التي سبقت معالجتها في الفصول السابقة من الكتاب) ، وتفسر
 هذه الصيغ باعتبارها تقوم مقام أي قضايا مفردة وفقاً للمعاني التي نختارها
 لنخص بها الأحرف « أ » ، « ب » ، « ف » ، « ل » ، « ط » .. إلخ ..
 وعلى ذلك من المستحيل تناول موضوع الصدق أو الكذب في الصيغة . ولكننا
 نستطيع أن نبين القيمة الخاصة « بالصدق » أو « الكذب » فقط عندما نفسر
 الثابت الفردي « أ » والمحمول الممثل في الثابت « ف » داخل الصيغة « ف أ » .
 وعندئذ سنكون بصدد الكلام عن القضية الناتجة عن إعطاء هذا التفسير إلى
 « أ » وإلى « ف » بداخل « ف أ » . مثلاً إذا فسرنا « أ » على أنها «لندن»
 وكذلك « ف » على أنها « مدينة كبيرة » حصلنا على القضية الصادقة « لندن
 مدينة كبيرة » . وبمجرد معرفة التفسير يمكن تخصيص قيمة الصدق truth value
 بعامة ولكنها خاصية هامة لبعض الصيغ بحيث تصبح صادقة بحكم أحد التفسير

وكاذبة بحكم تفسير آخر . مثال ذلك أنه في المثل المعطى عاليه تكون القيمة الخاصة بالقضية « ف أ » هي قيمة الصديق إذا فسرنا « أ » على أنها «لندن» وفسرنا « ف » على أنها « مدينة كبيرة » ولكنها تأخذ القيمة « كاذبة » إذا قرأنا « أ » على أنها « لندن » وقرأنا « ف » على أنها « مدينة صغيرة » .

وقد يشعر القارئ ببعض الحيرة بناء على الواقعة التي تشير إلى أن « ف » ، « أ » تسمى ثوابت عندما تفسر « ف أ » بأنها تعنى أى قضية مفردة نختارها . والسبب في ذلك هو أن الحد « المتغير الفردي » مطلوب منه أن يعنى شيئاً مختلفاً تماماً على نحو ما سيتضح لنا في الفقرات ٥ ، ٦ . وقد تناولنا الموضوع في تفصيل أكبر في الفقرة رقم ٩ . وهناك نقطة يحسن مراعاتها ، وهي أن استخدام كلمة « متغير » في حساب المحمول معرض لبعض القيود التي لا تقبل التطبيق بالنسبة إلى بعض المعاني الأكثر حسية في اللفظة التي سبق تقديمها في عبارة « متغير قضوى » بالفصول رقم ٢ ، ٣ ، ٤ من هذا الكتاب .

٣ - ملاحظات إضافية عن أسماء العلم والأوصاف :

كان التمييز بين أسماء العلم والأوصاف موضوعاً لقدر كبير من المناقشة الفلسفية . ومن حسن الحظ أن كل أغراض هذه المناقشة ونتائجها لا علاقة لها تماماً تقريباً بدراسة المنطق الأولى . وبالنسبة لأغراض هذا الكتاب فكل ما كان نحويّاً اسم علم يكون أيضاً منطقيّاً اسم علم . لكن هناك عدد من أنواع الخلط التي يحسن الحذر منها .

وأول نقطة نوضحها هي أن القضايا مثل « الرجل شجاع » أو « بعض الرجال شجعان » أو « الفرس حيوان نبيل » ليست من بين القضايا المفردة لأنها لا تشمل على أى اسم علم . هذه القضايا في الواقع قضايا معقدة برغم مظهرها البسيط وسوف نناقشها في موضعها المناسب .

والنقطة الثانية هي أنه برغم أن اسم العلم ينحصر وحده على سبيل التفرد (أعنى أنه يجب أن يستخدم في مجرى أى برهان جزئى للإشارة إلى فرد واحد فقط) فليس في ذلك أى طابع مميز يقوم مقام التعريف لأسماء العلم . وتقوم بعض الأوصاف - على سبيل المثال « الملكة الحالية لبريطانيا » - بوصف فرد واحد فقط . وبرغم ذلك فهذه أوصاف وليست أسماء علم . ونستطيع أن نبرز الاختلاف بين هذه العبارات الوصفية المتفردة وأسماء العلم الصادقة بالتنبيه إلى أن بعض الأوصاف من هذا النوع لا تصف أى واحد أو أى شيء . نخذ مثلاً العبارة : « ملك فرنسا الحالى » ، في حين ينبغى من ناحية أخرى أن يشير اسم العلم إلى فرد .

وإذا طلبنا وضوحاً أكثر بالنسبة إلى الاختلاف بين اسم العلم والوصف أمكننا أن نتدبر المثل التالى ، فلفظة « بالومبو » هي اسم علم . ولكن إذا عرفت أنك سوف ترى « بالومبو » غداً فلن تدرى إطلاقاً ماذا تتوقع . وقد يكون ذلك إنساناً أو حصاناً أو كلباً أو جبلاً أو نهراً أو مدينة أو ما لا حصر له من الأشياء الأخرى . ولا يعطيك اسم « بالومبو » أقل دليل فيما يتعلق بطبيعة الشيء المسمى . أو بعبارة أخرى ليس هذا وصفيّاً .

٤ - العلاقات بين حساب القضايا وحساب المحمول :

من المهم مراعاة أن انتقلنا من منطق القضايا غير المحللة إلى منطق المحمولات لا يتضمن حدّاً فاصلاً أو قطعة صارمة مع مناهجنا السابقة في التناول . إذ يبنى حساب المحمول على حساب القضايا ويستخدم مناهجه وترقيمه طالما كانت هذه صالحة للتطبيق على نماذج جديدة من البناء المنطقى الذى تعنى به . وتمثل الصيغة القضية (س ٧ ص) قضية مركبة تتألف من أى قضيتين بسيطتين متحدتين بلفظة (أو) بمعناها الحصرى . ولعلها تمثل أيضاً

أى واحدة من القضايا التالية من (١) إلى (٦) أو أى عدد غير محدد من القضايا الأخرى ذات نفس الصورة المنطقية :

- ١ - إما أن كل الناس قانون أو أن ضعف الاثنين يساوى خمسة .
- ٢ - إما أن مدينة الإسماعيلية تقع بين السويس وبور سعيد أو أن ضعف الاثنين يساوى خمسة .
- ٣ - إما أن يكون محمود غير أمين أو أن بعض المحاسبين مهملون .
- ٤ - إما أن محموداً غير أمين أو أن محموداً غي .
- ٥ - إما أن محموداً غير أمين أو أن سعيداً غير أمين .
- ٦ - إما أن محموداً غير أمين أو أن سعيداً مخطئ .

* * *

ولنفرض أننا نستبدل الصيغة القضية المركبة (س ٧ ص) بصيغة المحمول (ف أ ٧ ج أ) . فهذه الأخيرة تمثل للفصل الشرطى بين القضايا . ولكنها لا تمثل فصلاً شرطياً بين أى قضيتين مهما تكونا ، مثلما تفعل (س ٧ ص) وإنما هى تمثل فقط فصلاً شرطياً بين أى قضيتين مفردتين تجمعان بين نفس الموضوع المنطقى وعدد مختلف من المحمولات . ومن بين الأمثلة المذكورة عليه من (١) إلى (٦) لا تمثل هذه الصيغة سوى رقم (٤) . وقد نقوم أيضاً بتمثيل القضية رقم (٥) على نفس المنوال بالعبارة (ف أ ٧ ف هـ) لأنها فصل شرطى بين قضيتين مفردتين لهما نفس المحمول ولكن موضوعاتهما كثيرة مختلفة . وقد يتم وضع المثل رقم (٦) وهو عبارة عن فصل شرطى بين قضيتين مفردتين مختلفتين من حيث الموضوع والمحمول فى صورة رمزية بالعبارة (ف أ ٧ ج هـ) . ولكن كل مثل من الأمثلة (١) ، (٢) ، (٣) يحتوى على الأقل على قضية واحدة بسيطة ليست بقضية مفردة وتقوم كأحد حدود الفصل الشرطى . [مثال ذلك « بعض المحاسبين مهملون » فى رقم (٣)]

وهي بالتالى لا يمكن وضعها فى عبارات رمزية مستخدمين الجهاز المنطقى طالما كان فى متناول يدنا إلا بوصفها وحدات قضوية غير محللة ذات الصيغة (س ٧ ص) .

وسوف يتبين إذن أن صيغ المحمول من النموذج « ف أ » ، « ف ه » . « ج ه » إنما تمثل القضايا على طريقة « س » ، « ص » ، « ل » فى حساب القضايا . ويقتصر الاختلاف بينهما على أن صيغ المحمول تعطى فكرة عن البناء الداخلى للقضايا التى تمثلها فى حين لا تفعل صيغ القضايا شيئاً من ذلك . وعلى هذا قد نستخدم جهاز الثوابت المنطقية والأقواس التى سبق أن استخدمناها إلى حد بعيد فى منطق القضايا من أجل تنمية وتطوير حساب المحمولات .

ومثال ذلك أن الصيغة :

$$((س \supset ص) \cdot (ه \supset ل \supset ص)) \supset (س \supset ل)$$

تعد صيغة سليمة فى حساب القضايا . وبالمثل تكون :

$$((ف \supset أ \supset ج \supset أ) \cdot (ه \supset ف \supset ب \supset ج \supset أ)) \supset (ف \supset أ \supset ف \supset ب)$$

صيغة سليمة فى حساب المحمولات . ويقتصر الاختلاف فيما بين كل من الصيغتين على أن الصيغة الثانية تقدم لنا معلومات إضافية عن :

١ - أن القضايا المدرجة تحتها كلها قضايا مفردة .

٢ - وأن للقضيتين الأوليين نفس الموضوع ومحمول كل منهما مختلف عن

الآخر .

ومحمول القضية الثالثة هو نفس محمول الأولى مع اختلاف الموضوع . وعلى ذلك فى إمكاننا أن ننظر إلى حساب المحمولات كفرع من أفرع المنطق التى تشتمل على حساب القضايا وتتجاوزه . وهذا الفرع يحتوى على حساب القضايا بمعنى أنه إذا كانت إحدى الصيغ فى هذا الحساب سليمة صارت صيغة

المحمول المناظرة سليمة في حساب المحمولات . ولكن حساب المحمولات يتجاوز حساب القضايا بمعنى أنه — أى حساب المحمولات — يجعل بناء أو هيكل مادة القضايا ظاهراً . ويصبح بسبب ذلك قادراً على أن يعنى بصور البراهين التي تتخطى مجال حساب القضايا . وفقاً لما تتصف به من تعقيد .

٥ — الكم الجزئى للمحمول : الوجود :

تأمل القضايا التالية :

١ — حيوانات القنطور^(١) موجودة .

٢ — الخيول موجودة .

فهاتان القضيتان ليستا قضيتين مفردتين لأنهما لا تحتويان على أى أسماء علم . ومن ناحية أخرى يصعب إطلاق اسم تعبير وصفي على لفظة موجودة . فالحكم التقريرى بوجود الخيول لا يخبرنا أى نوع من الخيول هو الموجود . فكيف يمكن إذن تحليل مثل هذه القضايا ؟

دعنا الآن نتأمل العبارتين الآتيتين :

٣ — يوجد الشيء الذى يدعى القنطور .

٣ — يوجد الشيء الذى يدعى الحصان .

ومن الواضح أن هاتين العبارتين تعبران تماماً عن نفس القضايا كما تفعل كل من القضيتين الأوليين ورغم أن شكل التعبير قد يكون مألوفاً بدرجة أقل . وفى إمكاننا الآن أن نشق كلا من العبارتين (٣) ، (٤) فى جزأين كما يلي :

٥ — (يوجد الشيء) (الذى هو القنطور) .

٦ — (يوجد الشيء) (الذى هو الحصان) .

فهذه العبارة (يوجد الشيء) تعبر عن تصور من التصورات الأساسية فى

(١) القنطور حيوان خرافى .

المنطق ولا تقبل التحليل إلى ما هو أبعد من ذلك . وتسمى هذه العبارة بالكم الجزئي للمحمول (أو بتعبير بديل آخر : كم المحمول الوجودي) ويعد الاسم الموصول (الذي) هنا أيضاً أساسياً ، وسنرى أن الدور الذي يؤديه في المنطق أشبه ما يكون بدور « المتغير » في الجبر الابتدائي . والواقع أننا نستخدم الحروف (هـ) ، (و) ، (ى) في المنطق بدلا من اللفظة المكتوبة (الذي) وكذلك بدلا من لفظة « الشيء » . وعلى هذا تصبح القضايا (هـ) ، (٦) على النحو التالي .

٧ - (يوجد هـ) (هـ) (هـ هو قنطور)

٨ - (يوجد هـ) (هـ) (هـ هو حصان)

وباستخدام الحروف الضرورية (ف) ، (ج) كرموز تشير إلى المحمول نضع (ف) محل (هـ هو قنطور) في القضية رقم (٧) ونضع (ج) محل (هـ هو حصان) في القضية رقم (٨) :

٩ - (يوجد هـ) (ف هـ)

١٠ - (يوجد هـ) (ج هـ)

ولكننا في النهاية نعرض الرمز « ← » ليقوم مقام قولنا « يوجد واحد أو أحد » فنحصل على الآتي :

١١ - (← هـ) (ف هـ)

(← هـ) (ج هـ)

وتتميز هذه التعبيرات بأنها تظهر البناء (الهيكل) المنطقي في القضايا مثل « حيوانات القنطور موجودة » ومثل « الخيول موجودة » وتعتمد الخصائص المنطقية لهذه القضايا على هذا البناء (الهيكل) .

ولعله قد يظهر لأول وهلة أن عرض هذا الجهاز الرمزي المحكم من أجل التعبير عن قضية بسيطة مثل (الخيول موجودة) هو ضرب من إظهار

التعاليم الذي لا لزوم له . ولكن الأمر ليس كذلك . إذ أن اكتشاف التحليل الصحيح للقضايا الوجودية وابتكار الأسلوب الرمزي المنطقي الذي يؤدي إلى إظهار بنائها قد أدى بالفعل إلى نتائج هامة في المنطق وفي الفلسفة . وستبين بوضوح بعض المزايا المنطقية لهذا الأسلوب الرمزي كلما تقدمنا .

٦ - تحليل بعض القضايا ذات كم المحمول :

افرض أننا نود أن نقول :

١ - حيوانات القنطور غير موجودة

من الواضح أن هذه مجرد نفي لعبارة (حيوانات القنطور موجودة) وبالتالي ستأخذ للصورة :

٢ - $\neg (\leftarrow a)$ (a هو القنطور)

أو ٣ - $\neg (\leftarrow a)$ (a ف)

والآن تأمل :

٤ - بعض حيوانات القنطور تثار لنفسها

فهذه تصبح :

٥ - (يوجد الشيء) (الذي هو القنطور والذي يثار لنفسه)

وبوضع (f) محل (هو القنطور) ، (j) محل (يثار لنفسه)

نحصل على :

٦ - $(\leftarrow a)$ ($f . j$)

وبالمثل :

٧ - لا واحد من حيوانات القنطور يثار لنفسه

تصبح :

٨ - $\neg (\leftarrow a)$ (بعض حيوانات القنطور يثار لنفسه)

وهذه تأخذ الصورة :

٩ - ب (← هـ) (ف هـ . ج هـ)

وبالمثل :

١٠ - كل حيوانات القنطور تتأثر لنفسها

يمكن أن تكتب كالاتي :

(١١) لا واحد من حيوانات القنطور لا تتأثر لنفسها .

وهذه تأخذ الصورة :

(١٢) ب (← هـ) (ف هـ . ب ج هـ)

وعلينا أن نلاحظ فيما يتعلق بالتعبيرات المماثلة لرقم (٦) أن :

(٦) (← هـ) (ف هـ . ج هـ)

ليست مثل الآتي :

(١٣) (← هـ) (ف هـ) . (← هـ) (ج هـ)

ذلك أنه وفقاً للمعاني التي تخصص حالياً لكل من (ف) ، (ج) يصبح

معنى (٦) كالاتي :

(٤) بعض حيوانات القنطور تتأثر لنفسها .

في حين أن (١٣) تنص على أن شيئاً ما هو القنطور

وأن شيئاً ما (وقد يكون نفس الشيء وقد لا يكون) يتأثر لنفسه . أو بعبارة

أخرى العبارة رقم (١٣) تعني نفس ما تعنيه :

١٤ - حيوانات القنطور موجودة والأشياء التي تتأثر لنفسها موجودة . وقد

يكون هذا صحيحاً تماماً حتى لو لم تكن حيوانات القنطور تتأثر لنفسها .

ولا بد أن نبرز هنا بوجه خاص أن الصيغ مثل (← هـ) (ف هـ) ،

(← هـ) (ف هـ . ج هـ) وهكذا ، يمكن أن تفسر بأنها تحل محل

عدد كبير من القضايا المختلفة . (والواقع أنه يمكن أن تفسر أى صيغة من بين هذه الصيغ بعدد كبير لا حد له من الطرق) . وتعد من أهم خصائص بعض مثيلات تلك الصيغ أنها تعبر عن قضية صادقة وفقاً لبعض التفسيرات وتعبر عن قضية كاذبة وفقاً لبعضها الآخر . وتوجد صيغة أخرى مثل : (هـ ← هـ) (ف هـ - ف هـ) من الواضح أنها بالضرورة لا بد أن تكون صادقة أيّاً كان المعنى الذى تخصصه لحرف (ف) . وشرط الصدق الوحيد لمثل هذه الصيغة هو أن شيئاً ما - أيّاً كان - لا بد أن يكون موجوداً وبالمثل توجد صيغ أخرى كالعبارة :

(هـ هـ) (ف هـ . هـ ف هـ) التى يتحتم أن تكون كاذبة أيّاً كان المعنى الذى نعزوه إلى (ف) . (وسيلاحظ القارئ أن تلك الأصناف الثلاثة من صيغ المحمول تماثل على وجه التحديد الصيغ الاحتمالية وصيغ تحصيل الحاصل والصيغ غير السليمة فى حساب القضايا .

وكل هذه الصيغ التى تناولناها حتى الآن هى صيغ كم محمول بسيطة باستثناء رقم (١٣) فيما تقدم . أو بعبارة أخرى تتألف كل هذه الصيغ من كم محمول مفرد تتلوه صيغة مفتوحة^(١) مثل (ف هـ) ، (ف هـ ج هـ) وهكذا . وسوف نحصر انتباهنا حالياً فى مثل هذه الصيغ مع الاهتمام بأكثر صورها تعقيداً مرة أخرى فى الفقرات (١٠) ، (١١) التالية .

(١) انظر الفقرة التاسعة القادمة فى نفس هذا الفصل من أجل الحصول على شرح مفصل للصيغ المفتوحة .

٧ - كم المحمول الكلى^(١) :

القضية :

١ - حيوانات القنطور موجودة

يمكن أن يعبر عنها بمقدار ما يهم ذلك بناءها (هيكلها) المنطقي بالصورة التالية :

٢ - يوجد واحد ه بحيث إن ه هو القنطور

أو ٣ - (ه) (ه ف)

القضية :

٤ - حيوانات القنطور غير موجودة

هى عبارة عن نتي (١) وتأخذ الصورة :

٥ - ه (ه) (ه ف)

ولكن (٤) يمكن أن يعبر عنها كالاتى :

٦ - لا شىء هو القنطور

أو ٧ - أياً تكن ه فإن ه ليست القنطور .

وتسمى صورة التعبير « أياً تكن ه » بكم المحمول الكلى ويعبر عنها رمزياً « (ه) » . وبهذا يمكن التعبير عن البناء المنطقي فى (٧) كالاتى :

٨ - (ه) (ه ف)

أما القضية :

(١) سنطلق اسم « المكيف الكلى » على « كم المحمول » فى بعض الأحيان ولكنهما يعنيان دائماً الشىء نفسه هنا انظر قاموس رينوز ص ٢٦١ .
(المترجم)

٩ - كل شيء هو قنطور

ف ذات صورة كالآتي :

١٠ - (هـ) (ف هـ)

ولا شك في أن كلا من (هـ) ، (ا) لهما نفس المعنى ويعلّمكم المحمول الكلى بشكل ما لا لزوم له . إذ يمكن تعريفه في حدود (هـ) وكذلك (ب) تماماً مثل الثابتة (٠) التي أمكن تعريفها في حدود (٧) ، (ب) . ولكننا قد ندخل بطبيعة الحال على نفس المنوال كم المحمول الكلى أولاً ثم نقوم بتعريف كم المحمول الجزئي في حدود خاصة به . فيكون لدينا إما :

أولاً : « (هـ) ا »

وتعرف بما معناه

« (هـ) ب ا »

أو ثانياً : « (هـ) ا »

وتعرف بما معناه

« (هـ) ب ا »

[سوف تستخدم بعض التعبيرات من الشكل « (هـ) ا » ، « (هـ) ب » وهكذا إلى آخره في مقام مختصرات بدلا من التعبيرات العادية ذات كم المحمول . فالحروف التاجية ا ، ب ، . . . ستقوم مقام الصيغ المفتوحة البسيطة أو المعقدة من طراز « ف هـ » ، « ف هـ ب ج هـ » ، إلخ . . .]

وكيفما كان اختيارنا فمن الواضح أنه حينما كانت « ا » دالة صدق للتعبيرات

مثل « ف هـ » ، « ج هـ » ، إلخ . . . يمكننا أن نكتب دائماً « (هـ) ا » في موضع

« ب (هـ) ب أ »

أو أن نكتب « ب (هـ) أ » في موضع « ب (هـ) ب أ » .

وعلى نفس المنوال يمكننا دائماً أن نضع « ب (هـ) ب أ » في موضع

« ب (هـ) أ » وأن نضع « ب (هـ) ب أ » في موضع

« ب (هـ) أ » . وعلى ذلك فإذا كانت علامات النفي تظهر قبل صيغة بسيطة ذات كم محمول نستطيع دائماً استبعادها أولاً عن طريق قاعدة حذف النفي المزدوج وثانياً عن طريق القواعد المبينة هنا . ولهذا السبب يعد إدخال كمين للمحمول أو مكيفين كمين وسيلة جيدة لتبسيط تناولنا للصيغ البسيطة ذات كم المحمول .

٨ - تفسير قضايا كم المحمول على أنها قضايا شرطية متصلة ومنفصلة :

لعل القارئ قد لاحظ وجه شبه معين من حيث السلوك المنطقي عند ذكر المماثلة السابقة بين قضايا كم المحصول الجزئية والكلية من ناحية والثوابت المنطقية (٧) ، (٠) من ناحية أخرى . وكما تعيننا قواعد دي مورجان على تحويل

صيغ القضايا من النموذج (س . ص) إلى النموذج « ب (ب س) ص »

وكذلك من النموذج « ب س . ص » إلى النموذج « ب (ب س) ص » .

« ب ص » . . . فهناك أيضاً ثنائية متكافئة بين « ب (هـ) » ، « ب (هـ) » بحيث

يمكن تعريفهما بحدود كل منهما الآخر بمعاونة علامة النفي .

ويمكن توضيح ذلك أكثر وأكثر عن طريق النظر إلى العلاقات بين صيغ

كم المحمول وبعض القضايا الشرطية المتصلة والمنفصلة من الصيغ المفردة كالاتي :

فقد رأينا أن :

١ - حيوانات القنطور موجودة

يمكن إعادة كتابتها بدون تغيير المعنى على النحو الآتي :

٢ - (يوجد « ه ») (« ه » هو قنطور)

وأما الآن في (١) ، (٢) تأكيد بأن شيئاً واحداً على الأقل يتصف بكونه « قنطوراً » . وعلى ذلك تكون القضيتان (١) ، (٢) صادقتين في حالة واحدة فقط وهي أن تكون :

٣ - إما أن ١ قنطور أو ٢ قنطور أو ٣ قنطور أو أو ان قنطور .

قضية صادقة حيث إن كلاً من ١ ، ٢ ان تنتمي إلى صنف موجود في السكون . وبالتالي :

٤ - (ه) (ه ف)

ستكون صادقة فقط إذا كانت القضية :

٥ - ف ١ ٧ ف ٢ ٧ ف ٣ ٧ ٧ ف ان صادقة .

وبذلك نحصل على علاقة بين قضية كم المحمول الجزئية والثابت المنطقي « ٧ » .

وبالمثل إذا أردنا تأكيد قضية كلية مثل :

٦ - كل شيء مادي

كان ذلك ممكناً في حالة واحدة فقط وهي أن تكون القضية التالية (٧) صادقة .

٧ - ١ موجود مادي و ٢ موجود مادي و و ان موجود مادي .

حيث إن كلا من a_1, a_2, \dots ان كما هو الحال من قبل عبارة
عن أشياء موجودة في الكون .

ويمكننا التعبير عن القضية (٦) بطريقة رمزية على النحو الآتي :
٨ - (٥) (ف ٥)

كما يمكن التعبير عن القضية (٧) بطريقة رمزية على النحو الآتي :
٩ - « ف a_1 . ف a_2 . ف a_3 ف ان .

بحيث يمكن بذلك الحصول على علاقة بين قضية كم المحمول الكلية وقضية
شرطية متصلة .

وسنطلق على كل من القضيتين (٥) ، (٩) اسم « فك الأحكام » بالنسبة
إلى القضيتين (٤) ، (٨) على التوالي .

ونحن نعرف هنا من قواعد حساب القضايا أن :

$$10 - (ف a_1 \vee f a_2 \vee \dots \vee f an) \equiv$$

$$\neg (\neg f a_1 \wedge \neg f a_2 \wedge \dots \wedge \neg f an)$$

$$11 - (ف a_1 \vee f a_2 \vee \dots \vee f an) \equiv$$

$$\neg (\neg f a_1 \vee \neg f a_2 \vee \dots \vee \neg f an)$$

وقد رأينا فيما سبق أنه إذا كانت

« ١ ان » تمثل كل الأشياء في الكون فإن الجانب الأيمن من القضية

(١٠) يكون صادقاً في حالة واحدة فقط هي عندما تكون

$$12 - (٥) (ف ٥)$$

صادقة . بل أكثر من ذلك أن القضية (١٢) مكافئة للقضية :

$$13 - \neg (٥) (ف ٥)$$

وتكون (١٣) صادقة في حالة واحدة فقط وهي أن يكون الجانب الأيسر من

(١٠) صادقاً . وبالمثل يكون الجانب الأيمن من (١١) صادقاً في حالة واحدة فقط وهي عندما تكون :

١٤ - (هـ) (ف هـ)

صادقة . والقضية (١٤) هي نفس الشيء كالقضية :

١٥ - هـ (هـ) (ب ف هـ)

التي تكون صادقة في حالة واحدة فقط وهي أن يكون الجانب الأيسر من القضية (١١) صادقاً . وبهذا يعد ازدواج قضايا كم المحمول (هـ) ، (هـ) نتيجة مترتبة على قواعد دي مورجان التي تقوم بمثابة قوانين حساب القضايا .

ومن المهم ملاحظة أن هذه العلاقة فيما بين الصيغ ذات كم المحمول وبعض القضايا الشرطية المتصلة والمنفصلة تكون قائمة عامة عندما يكون رقم عدد أعضاء الفئة المعنيين محدوداً . ولسنا بحاجة إلى بذل الاهتمام بإمكان توافر مستويات لا نهائية لأعضاء الفئة في هذه المرحلة . (راجع الفصل السادس - الفقرة الأولى) .

٩ - المتغيرات الحرة والمتغيرات المقيدة - الثوابت :

قد ينشأ قدر من الاضطراب في أذهان الطلاب حول استعمال كلمات : « ثابت » و « متغير » في حقل المنطق . ولعل القليل من الألفاظ سيكون مفيداً هنا في هذه المرحلة للتفسير . ففي هذا الجزء من المنطق الذي يعالجه هذا الفصل يجرى استخدام ستة أنواع مختلفة من الرموز :

١ - ثوابت مفردة ا ، ب ، ج ...

٢ - متغيرات مفردة هـ ، ي ، م ...

٣ - ثوابت المحمول ف ، ط ، ك ...

متغيراً مقيداً كما يكون « هـ » متغيراً حرّاً في العبارة :

(ي) (ف ي ب ط هـ)

وعندما نتكلم عن الصدق والكذب في المنطق فإننا نغني بذلك الصدق المنطقي (أو الصحة المنطقية) والكذب المنطقي (أو عدم الصحة المنطقية أو التناقض) .
وفي الفصل الثاني تناولنا هذا النوع من الصدق والكذب من حيث علاقته بمنطق القضايا . ولكننا إذا شئنا استخدام ألفاظ « الصدق » و « الكذب » بمعناها العادي فإننا نستطيع ذلك فقط عن طريق وضع القواعد التي تيسر إعطاء تفسير لصيغنا (أو بعضها) على أنها تقوم مقام القضايا . وبالتالي سوف نقول إن الصيغة سليمة في حالة واحدة فقط وهي عندما تكون القضية التي تفسر أو توضح معنى تلك الصيغة على أنها تقوم مقامها صادقة . ونحن نقوم بتفسير الصيغة بأن نعزو بعض المعاني إلى الثوابت المتوافرة بداخلها . وعلى ذلك فقد نخص (ا) بمعنى الشخص « محمود » ونخص (ف) بمعنى صفة كونه طويلاً . ومن ثم نكون قد أعطينا الصيغة (ف ا) معنى معيناً هو أن « محموداً طويلاً » وتكون (ف ا) صادقة في حالة واحدة فقط وهي أن يكون محمود طويلاً . وبالطبع يمكننا أن نفسر (ف ا) بمعنى مختلف تماماً عن ذلك . ولكن المهم هو أننا بمجرد ما نعزو معنى معيناً إلى إحدى الصيغ في سياق بعينه نثبت عليه ولا نحيد عنه بحال .

وبهذا يصبح الفارق بين الثوابت والمتغيرات واضحاً الآن .

١ - الثوابت لا يمكن أن تحدد كمياً .

٢ - لا يمكن إعطاء تفسير أو إسباغ أحد المعاني على المتغير .

ولهذا السبب الأخير لا يمكن أن يقال بحال من الأحوال عن الصيغ التي تحتوي على متغيرات حرة إنها صادقة أو كاذبة . تأمل مثلاً الفارق بين (ف ا) ، (ف هـ) . وافرض أن « ا » تعني « وقم خمسة » وأن « ف » تعني « عدداً فردياً »

إذن (ف ١) تشير إلى أن الرقم خمسة عدد فردى وهو فعلاً كذلك . وعلى ذلك فالعبارة (ف ١) صحيحة بهذا المعنى . ولكن (ف ٥) تقول فقط إن « ه » رقم فردى . وذلك تعبير لا هو بالصادق ولا هو بالكاذب^(١) . ونستطيع إذا شئنا أن نقول بطبيعة الحال إن (ه رقم فردى) صحيحة بحكم بعض للقيم الخاصة فى (ه) وكاذبة بحكم قيم أخرى .

والواقع أننا (فى هذه المرحلة) فى المنطق لسنا حقيقة شديدي الشغف بالتفسيرات الخاصة بالصيغ . وذلك لأننا كمنطقة لا نغير اهتماماً كبيراً للصدق الخاص بالوقائع أو للصدق التجريبي . بل نحن معنيون بالصدق المنطقى . ومن أهم الأغراض التى يهدف إليها عرض النظريات المنطقية إعطاء معنى واضح لعبارة « الصدق المنطقى » . ونحن نقترح ما يلى كتفسير جزئى على أقل تقدير « للصدق المنطقى » :

تكون الصيغة صادقة منطقياً فى حالة واحدة فقط وهى إذا كانت صادقة مهما يكن التفسير الذى نعطيه للثوابت فيها .

وهذه لا شىء سوى إعادة تقرير أوضح للمذهب القديم القائل بأن الاستدلال الصحيح مستقل عن مادته أو مضمونه . (انظر الفصل الأول) ،

(١) يشار غالباً إلى (ه عدد فردى) ، (ه لون أحمر) وهكذا بوصفها دوال قضوية . وقد عرف اللورد برتراند رسل دالة القضايا التى أدخل تعبيرها فى المنطق على أنها « تعبير يحتوى على واحدة أو أكثر من المكونات المحددة بحيث يصبح هذا التعبير قضية بمجرد تخصيص بعض القيم لهذه المكونات » (انظر مقدمة إلى الفلسفة الرياضية ص ١٥٥ - ١٥٦) ومن الأفضيل تفادى هذا التعبير فى المعالجة الأولية للمنطق الرمزي بسبب بعض التقنيات المرتبطة باستخدام كلمة « دالة القضايا » أو « الدالة القضوية » فى منطق رسل .

« المؤلف »

ولكن هذه العبارة ليست تعريفاً نهائياً أو كلمة أخيرة إذا صح هذا القول . وإنما
يكفى هذا بالنسبة للعرض الحالى .

والنقطة الثانية التى نرجو أن تكون موضع عناية القارئ هى أن فكرة الصدق
المنطقى (كفكرة متميزة من الصدق الخاص بالوقائع) تمتد لتشمل الصيغ
المفتوحة . وهذا يتحقق بقولنا إن الصيغ المقترحة صادقة منطقياً إذا كان كمها
الكلى صادقاً منطقياً . أو بتعبير آخر أن تكون :

(ف ه ه ف ه)

صادقة منطقياً لأن

(ه) (ف ه ه ف ه)

صادقة منطقياً . وأن تكون

(ي) (ف ي ه ط ه)

غير صادقة منطقياً لأن

(ه) (ي) (ف ي ه ط ه)

غير صادقة منطقياً .

١٠ - التفسير والصيغ المستوفاة :

يمكن تفسير الصيغة المفردة مثل (ف ا) على أنها تقوم مقام قضية صادقة
أو قضية كاذبة . فمثلاً لو أعطينا (ا) معنى «سقراط» وأعطينا (ف) معنى
« فان » فسيكون من شأن (ف ا) أن تمثل القضية الصادقة التالية :

(سقراط فان)

وإذا جعلنا (ا) تشير إلى « أفلاطون » وجعلنا (ف) تعنى (حى إلى اليوم)

فسيكون معنى (ف ا) ما يلى :

(أفلاطون حى إلى اليوم)

وهي قضية كاذبة . وعلى ذلك فقد تشير أى صيغة مفردة إلى قضية صادقة وهو ما نعبر عنه بقولنا :

(١) أى صيغة مفردة هي صيغة مستوفاة

إذا تأملنا دوال الصدق الخاصة بالصيغ المفردة فمن السهل أن نلاحظ أنها تصبح مستوفاة في حالة واحدة فقط وإذا لم تكن دالة الصدق متناقضة . فإذا لم تكن دالة الصدق متناقضة كان ثمة تفسير للصيغ المفردة فيها يؤدي إلى صدق الدالة . مثلاً لنفرض أن الدالة التي نضعها موضع الاعتبار هي :

١ - (ف ١ ف ب) \subseteq ج د

فإذا فسرنا (١) ، (ب) ، (ج) على أنها « سقراط » و « أفلاطون » و « أرسطو » على التوالي وفسرنا متغيرات المحمول (ف) ، (ج) بالفاظ « فان » و « ذكي » حصلنا على ما يلي :

٢ - إذا كان سقراط فانياً أو كان أفلاطون فانياً كان أرسطو ذكياً .

وبتحليل قيم الصدق في (٢) نحصل على ما يلي :

$$1 = (1 \subseteq 1) = (1 \subseteq (1 \vee 1))$$

ومن الواضح بالمثل أننا لا نستطيع أن نجعل الدالة المتناقضة صادقة مهما تكن المعاني التي نعزوها إلى الصيغ المفردة . ولا يؤدي أى تفسير إلى أن :

٣ - (ف ١ . ب ف ١)

تصبح قضية صادقة . وذلك لأنه إذا كانت (ف ١) صادقة كانت (ب ف ١) كاذبة على الدوام والعكس صحيح . وبالتالي فدالات الصدق المتناقضة لن تكون مستوفاة وستظل دائماً بغير استيفاء . وبهذا نحصل على :

ب - تكون دالة الصدق للصيغ المفردة مستوفاة في حالة واحدة فقط وهي إذا كانت غير متناقضة .

ولنتأمل الآن صيغاً مثل :

$$I - (A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$$

$$II - (A \vee B) \rightarrow (A \vee C)$$

إلخ . . إلخ . . مما يحتوى فقط على صيغة كم محمول جزئية واحدة . ونحن نعرف أن :

(A \vee B) \rightarrow (A \wedge B) تعنى مثلاً أنه يوجد هنالك شيء . يحمل الخاصية (ف) وسيكون هذا التعبير صادقاً في حالة واحدة فقط وهي إذا كان ثمة صيغ مفردة من نوع (ف \vee أ) صادقاً . وبالمثل ستكون الصيغة :

$$(A \vee B) \rightarrow (A \vee C)$$

صادقة في حالة واحدة فقط وهي إذا كان بعض تفسير الصيغة (ف \vee أ) صادقاً . وقد رأينا أنه حيثما كانت لدينا صيغة من نوع :

$$(A \vee B) \rightarrow C$$

(التي تكون المتغيرات الفردية فيها مقيدة بصيغة بكم محمول جزئية واحدة) كان في الإمكان بسطها في صيغة شرطية منفصلة مكافئة لها من القضايا الجزئية (أو دالات الصدق الخاصة بمثل هذه القضايا) مثال ذلك :

$$4 - (A \vee B) \rightarrow (A \vee C)$$

يمكن بسطها كالتالى :

$$5 - (A \vee B) \rightarrow (A \vee C) \vee (A \vee B) \rightarrow (A \vee C) \vee (A \vee B) \rightarrow (A \vee C)$$

$$\vee (A \vee B) \rightarrow (A \vee C) \vee (A \vee B) \rightarrow (A \vee C) \vee (A \vee B) \rightarrow (A \vee C)$$

فإذا كان مسلماً بأن صفة معينة يتصف بها كل شيء في الكون وفسرت
(ف) بأنها تشير إلى تلك الخاصية كانت (ف أ) صادقة مهما تكن
المعاني التي نعزوها إلى «أ» وإذا كانت (أ) صيغة مفتوحة ذات طابع
جزئى مثل :

$$١٠ - (ف أ \subseteq هـ ج هـ) \vee م هـ$$

وأحللنا (أ) نحمل (هـ) حصلنا على ما يلي :

$$١١ - (ف أ \subseteq ج أ) \vee م أ$$

وستكون هذه صادقة بالنسبة إلى بعض قيم الصدق الخاصة بالمكونات مثل :

$$(١ \subseteq ١) \vee (١ \vee ١ \text{ صفر}) = ١$$

لأننا نستطيع أن نتعمد أعداد رقم (١١) لكي تكون قضية صادقة مهما
كان ما تشير إليه (أ) عن طريق اختيار معاني مناسبة لكل من (ف) ،
(ج) ، (م) . وعلى هذا ستكون :

$$١٢ - (هـ) (ف أ \subseteq هـ ج هـ) \vee م هـ$$

مستوفاة . وفي العموم :

(د) تكون (هـ) أ مستوفاة إذا كان انبساطها قضوياً غير متناقض .

١١ - الصيغ المستوفاة معاً في وقت واحد :

تعدّ الصيغتان - أوزوج الصيغ - (أ) ، (ب) مستوفيتين في آن معاً
إذا كان في إمكاننا أن نخصّ ثوابت المحمول والثوابت الفردية (إذا كان ثمة)
في كل من (أ) ، (ب) معبراً عن قضايا صادقة .

(بطبيعة الحال إذا ظهر نفس الحرف مثلاً «ف في كل من «أ» ، «ب»)
مقدمة في المنطق الرمزي

كان من الضروري أن يحمل نفس التفسير في كلتا الحالتين .

وإذا عدنا إلى النوع البسيط من الصيغ ذات كم المحمول التي تأملناها وجدنا أن هناك ثلاثة أنواع ممكنة فقط من الصيغ الزوجية :

$$I - (A) : (B)$$

$$II - (A) : (B)$$

$$III - (A) : (B)$$

(تعد الحالة :

$$(A), (B)$$

بوضوح من نفس نوع الحالة مثل رقم (٢) في أمثلة الفقرة السابقة .
ومن الواضح الآن أن الصيغ لا بد أن تكون مستوفاة فردياً إذا كانت مستوفاة في آن معاً . غير أن هذه ليست الحالة الوحيدة . وذلك لأن (A) (B) ،
(A) (B) تعدان مستوفيتين فردياً وإن لم تكونا معاً مستوفيتين في آن معاً .
ومن الواضح أنه إذا كانت (A) (B) صادقة كانت (A) (B) صادقة
مهما افترضنا ما تشير إليه (A) . وبالمثل إذا كانت

$$(A) (B)$$

صادقة كانت (A) (B) أيضاً صادقة أيّاً كان ما تشير إليه (A) . ولكن
إذا كانت (A) (B) صادقة كانت (A) (B) إذن كاذبة ما دام (A) (B) .
دالة صدق متناقضة . ومن ناحية أخرى (A) (B) ، (A) (B) (A) (B)
تعدان مستوفيتين في آن معاً وهذا ظاهر من واقعة أن (A) (B) . (A) (B)
ليست متناقضة . ويمكن فحص هذه بوضعها في جدول الصدق :

ف أ . (ف أ ه ج أ)

١	١	١	١	١
٠	٠	١	٠	١
١	١	٠	٠	٠
٠	١	٠	٠	٠

وإذا كان التعبير متناقضاً لزم أن يحتوى العمود الثانى (تحت علامة الشرطى المتصل) على مجموعة من الدوائر (الأصفار) الكاملة .
(وعلى القارئ أن يقيم جدولا مناظراً للعبارة « ف أ . ه ف أ » كى يرى مدى التعارض) .

وبالتالى نحصل على القاعدة التالية :

١ - (ه) أ ، (ه) ب تكونان مستوفيتين فى آن معاً فى حالة واحدة فقط وهى إذا كانت أ . ب متآلفة من ناحية دالة الصدق^(١) .
وبنفس طريقة البرهان نحصل على ما يلى :

١١ - (ه) ا ، (ه) ب تعدان مستوفيتين فى آن معاً فى حالة واحدة فقط هى إذا كانت أ . ب متآلفة من ناحية دالة الصدق^(٢) .

وإذا عدنا إلى الحالة الثالثة (ج) فى الفقرة السابقة كان علينا أن نصوغ قاعدة مختلفة . فتكون (ه) (ه ف ه) مستوفيتين فى آن معاً لأن (ه) (ه ف ه) تكون صادقة فى حالة واحدة فقط هى إذا كانت :

(١) (ف أ) (ف أ ه) (ف أ ه ج) (ف أ ه ج أ)

(٢، ١) يلاحظ أن القواعد قد وضعت من أجل الاختصار برغم أنه من الضرورى جداً أن نصيف (وذلك عندما يحل محل المتغيرات الفردية ثوابت فردية) - راجع نهاية للفقرة رقم ٩ من هذا الفصل .

الصدق الخاص به يحتوى فى عموده الأوسط على « أصفار فقط » .
ويمكن الحصول على نفس النتيجة بالحدس عن طريق بحث تفسير
رقم (١) . نفرض أن (ف) تعنى « القنطور » وأن (ج) تعنى « المنتقم »
وأن (م) تعنى « شجاع » . فعلى ذلك ينشأ :

(٣) - (هـ) (ف هـ ج هـ) تعنى

(٣) - كل القنطورات منتقمة

(٤) - (هـ) (ج هـ م هـ) تعنى

(٤) كل المخلوقات المنتقمة شجاعة

(٥) - (هـ) (ف هـ م هـ) تعنى

(٥) - بعض القنطورات ليست شجاعة .

وبهذا من الواضح أنه إذا صدقت كل من (٣) ، (٤) كان من
الضرورى أن تكون (٥) كاذبة .

وتعرف مجموعة الصيغ فى رقم (١) باسم الثلاثى غير المتآلف « لاد فرانكلين »
وهى ما يعد الأساس الصورى الذى يدفع بالمشروعية المنطقية معظم القياسات
التقليدية^(١) وبما أن ثلاث الصيغ ليست مستوفاة فى آن معاً فمن الواضح أنه
من صدق أى اثنتين منها يمكن الاستدلال على كذب الثالثة . أو إذا
أعطينا أى اثنتين منها كمقدمات أمكن الاستدلال على نقي الثالثة . وعلى ذلك :

(٦) - (هـ) (ف هـ ج هـ) . (هـ) (ج هـ م هـ) .

إذن (هـ) (ف هـ ج هـ) .

(٧) - (هـ) (ف هـ ج هـ) . (هـ) (ف هـ م هـ) .

إذن (هـ) (ج هـ م هـ) .

(٨) - (هـ) (ج هـ م هـ) . (هـ) (ف هـ م هـ) .

إذن (هـ) (ف هـ م هـ) .

(١) يدعى هذا القياس بهذا الاسم نسبة إلى السيدة كريستين لاد - فرانكلين
(١٨٤٧ - ١٩٣٠) عالمة المنطق الأمريكية .

وكلها صور صحيحة من صور الاستدلال ..

وتقع الاستدلالات الواردة في الفقرة الأولى كلها تحت إحدى صور الاستدلال من رقم (٦) إلى رقم (٨) . وبذلك يمكننا أن نضع « ف » في رقم (١) على أنها تشير إلى (الأعضاء العاديين في المجتمع) ، وقد نضع « ج » لتشير إلى (يدفع اشتراكاً سنوياً قيمته جنيه واحد) ، ونضع « م » لتشير إلى (يتلقى مطبوعات الجمعية بدون التزامات مالية جديدة) . وفي المثل رقم (٢) نضع « ف » لتشير إلى (أرساليين) ، ونضع « ج » لتشير إلى (ذوى نظرات أخلاقية صارمة) ، ونضع « م » لتشير إلى (لا يصلحون كعلماء جيدين في علم الإنسان) وفي المثل رقم (٣) نضع « ف » لتشير إلى (الذين لم يحصلوا على الشهادة الجامعية بعد) ونضع « ج » لتشير إلى (لهم الحق في استخدام مكتبة الجامعة) ونضع « م » لتشير إلى (لهم رغبة جادة في الحصول على منحة) .

هناك عدد قليل جداً من القياس لا تشمل صيغة لاد - فرانكلين . وتلك هي القياسات التي تستخلص فيها نتيجة جزئية من مقدمات كلية . مثلاً :

كل القنطورات منتقمة

بعض القنطورات شجاعة

إذن بعض المخلوقات المنتقمة شجاعة .

وبوضع « ف » لتشير إلى (قنطورات) ، ويوضع « ج » لتشير إلى (منتقمة) وكذلك « م » لتشير إلى (شجاعة) نحصل على ما يلي :

(٩) - (٨) (ف ٨ ج ٨) ، (٨) (ف ٨ ج ٨ م ٨) .

إذن (٨) (ج ٨ م ٨)

وببنى النتيجة في رقم (٩) نحصل على الثلاثية :

(١٠) - (٨) (ف ٨ ج ٨) ، (٨) (ف ٨ ج ٨ م ٨) ،

(٨) (ج ٨ ج ٨ م ٨)

وليست هذه نفس الشئ مثل رقم (١) وبرغم ذلك فهي متألّفة لأن :

(١١) - (ف أ ب ج أ) . (ف أ ب م أ) . (ج أ ب م أ) .
تكون صادقة إذا عزونا إلى (أ) معنى بحيث تصبح (ف أ) : (ج أ) .
(م أ) كلها كاذبة . وهذا يعنى أن الاستدلال يكون غير صحيح ، إذا
لم يكن ثمة أى قنطورات . وعلى ذلك فن أجل جعلها سليمة منطقية
(صحيحة) يجب أن ندخل مقدمة إضافية تؤكد وجرد القنطورات بحيث
يكون لدينا (بدلاً من رقم « ٩ ») ما يلى :

(١٢) - ((هـ) (هـ ف) (هـ) (هـ ف هـ ب ج) . (هـ)
(ف هـ م هـ))

إذن (هـ) (هـ ج . هـ م هـ)

(وفى موضع رقم « ١٠ »)

(٣) - (هـ) (هـ ف) ، (هـ) (هـ ف هـ ب ج) ، (هـ)
(ف هـ م هـ) ، (هـ) (هـ ج هـ م هـ) .

وليست أربع الصيغ فى رقم (١٣) مستوفاة فى آن معاً بحكم أن تعبير
دالة الصديق ،

(١٤) - ف أ . (ف أ ب ج أ) . (ف أ ب م أ) .
(ج أ ب م أ)

متناقض^(١) وهذا بخلاف رقم (١١) . وبالتالي يكون الاستدلال رقم (١٢)
صحيحاً منطقياً . وإذا أخذنا أى ثلاث من بين الصيغ الأربع فى رقم
(١٣) كمقدمات أمكننا أن نعمم صوراً متنوعة من الاستدلال التى تشتمل على
بعض الأشكال التى لم يعترف بها التخطيط الإجمالى التقليدى .

(١) يستطيع الطالب أن يختبر ذلك نفسه عن طريق بناء جداول الصديق المناسبة .

مراجع الفصل الخامس :

تقع البيانات الوافية الأولية الخاصة بحساب المحمول المحصور تحت فئتين
أوصنفين : أحدهما الرصني وثانيهما الأكثر دقة . وستجد بيانات وصفية
وافية في كتاب أمبروزولا زيروفيتش (١) وفي كتاب استروسن (٣٠)
وتوجد تفصيلات أولية أكثر دقة في كتاب كولي (٧) وكتاب رايشنباخ
(٢٥) . ويقدم إيتونا (١٠) في كتابه مقدمة وصفية مفيدة للرمزية المستخدمة
في البرنكيبييا (٣٣) والتناول الكامل لهذا الموضوع موجود في كتاب هيلبرت
وأكرمان (١٢) .

الفصل السادس

بعض التطورات والأبعاد الهامة

١ - توسعات في صنف الصيغ :

لقد بحثنا بالتفصيل في الفصل الخامس صنفاً محدوداً من صيغ حساب المحمول أو حساب الدالات . وسنحاول هنا أن نعدد على وجه الدقة محتويات هذا الصنف :

i - الصيغ الذرية وهي التي تشتمل على ثابتة محمول واحد متبوعة بمتغير فردى . مثال ذلك (ف ه) ، (ج ه) ، (ف ي) . وما شابه ذلك .

ii - دوال الصديق الخاصة بالصيغ الذرية . . وكلها تحتوي على نفس المتغير الفردى . فمثلاً .

(ف ه ج) ، (ج ي ل ي) وهكذا إلخ ...

iii - الصيغ المقفلة التي تنتج عن وضع (د ه) أو (ه) ، (د ي) ، (ي) وما شابه ذلك في مقدمة الصيغ من النوع (i) ، (ii) . مثال ذلك :

(د ه) (ف ه) ، (ي) (ج ي ل ي)

وما شابه ذلك من المتغيرات . فالمتغير الواقع في كم المحمول أو ما يصح أن نسميه بالمكيف الكمي^(١) لا بد أن يكون هو نفس الشيء هنا كالمتغير

(١) استخدمنا لفظ كم المحلول حتى الآن للتعبير Quantifier على أساس أنه يقع في الجملة كتحديد كمي للمحلول . ولكن وضعه يأتي عادة كرمز بين قوسين في أول العبارة للتمهيد لظهوره مرة أخرى في العبارة كمكيف كمي للقضية . وهذا هو ما يدفعنا إلى استخدام تعبير مكيف كمي أحياناً .

الواقع في الصيغة التالية :

(iiii) دول الصدق الخاصة بالصيغ من النوع (iii) .

ولفتأمل على وجه الخصوص مسألة الاستيفاء الخاصة بتلك الصيغ ومعية الاستيفاء (أو آنية الاستيفاء بين صيغتين أو أكثر) لصيغتين أو أكثر تؤخذ معاً من بينها^(١) .

وقد يصدم التقييد الموجود في رقم (ii) القارئ بما يبدو فيه من تحكم . فلماذا لا نسمح بالصيغ من قبيل :

(ف هـ جـ د ي) أو حتى (ف هـ جـ د ف ي)؟

وما هي النتيجة التي تترتب على السماح بمثل هذه التعبيرات ؟

فلنفحص هذه إمكانية .

خذ الصيغة التالية :

(١) (ف هـ جـ د ي)

فما دامت هذه صيغة مفتوحة فلا يمكن أن يقال عنها إنها صادقة أو كاذبة . وهنا تستخدم كم المحمول أو المكيف الكمي (هـ هـ) ونطبقه فنحصل على ما يلي :

(٢) (هـ) (ف هـ جـ د ي)

ولكن هذه الصيغة تحتوي على متغير حر هو (ي) . ولذلك فعلينا أن نطبق مكيفاً كمياً آخر مثل (د ي) مثلاً . وبهذا نحصل على الآتي :

(١) يلاحظ أن لفظة «آنية» من الألفاظ المستخدمة في الرياضيات على مستوى المرحلة الإعدادية ورغم أن هذا المصطلح قد يبدو فلسفياً محضاً . ويقال المعادلات الآنية ولا حرج على الإطلاق في استخدامها لأنها تشير رياضياً إلى استخدام معادلتين في آن واحد . (المترجم) .

(٣) (ء ى) (ء هـ) (ف هـ ج ى)

وما هو المعنى الذى نعزوه إلى رقم (٣) إذن؟ يوجد بعض الخيار فى المعنى هنا ولكن أوضح المعانى هو الآتى :

(٤) هناك شىء هو (هـ) وشىء هو (ى) (وقد يكونان نفس الشىء أو قد لا يكونانه) بحيث لو كانت (هـ) تحمل الخاصية (ف) كانت (ى) تحمل الخاصية (ج) .

ويلاحظ أن هذا المعنى مختلف تماماً عن المعنى الخاص بالعبارة التالية :

(٥) (ء هـ) (ف هـ ج هـ)

فهذه العبارة فى رقم (٥) تنص فقط على أنه يوجد شىء واحد على الأقل إما أنه لا يحمل الخاصية (ف) أو أنه يتصف بالخاصية (ج) . وهذه القضية يندر أن تكون كاذبة وهى فى العادة أتفه من أن تستحق التقرير) .

وقد يكون الفرق بين العبارتين التاليتين (٦) ، (٧) مثلاً أوضح على ذلك :

(٦) (ء ى) (ء هـ) (ف هـ . ج ى)

(٧) (ء هـ) (ف هـ . ج هـ)

فالعبارة رقم (٦) إذا أمكن تفسيرها تفسيراً ملائماً وكان معناها مثلاً أنه يوجد شىء أحمر وشىء مستدير أو يكون معنى العبارة رقم (٧) وفقاً لنفس التفسير أنه يوجد شىء أحمر ومستدير فى آن معاً ، ومن الواضح أن هذا أمر مختلف تماماً .

ويتجلى من هذا أنه يمكننا بناء صيغ ذات مكيفات كمية ثلاثية أو رباعية على هذا النمط . وهنا يقوم سؤالان :

(١) ما هي العلاقات القائمة بين الصيغ الجديدة والصيغ القديمة ؟
 (ب) وبصفة خاصة هل تنبئ على هذه الصيغ الجديدة توسعات
 وتشعبات أصيلة لحسابنا هذا ؟

ولسوف نتقدم أولاً للإجابة عن هذين السؤالين :

٢ - الصيغ التي تحتوي على أكثر من مكيف كمي واحد :
 دعنا نتأمل السؤال الثاني أولاً . وعلينا أن نعبر عنه على نحو أكثر دقة
 فنصوغه من جديد بقولنا :

(ب) هل تحمل بعض الصيغ الجديدة أو كلها من المعاني ما لا يمكن
 التعبير عنه بالصيغ القديمة ؟

ولهذا الغرض سوف نذهب إلى حد القول بأن الصيغتين (س^١) ، (ص^١)
 يكون لهما نفس المعنى إذا كان أى تفسير يستوفى في (س^١) يكون مستوفى
 أيضاً في (ص^١) وبالعكس . والإجابة عن السؤال (ب) هي في الواقع
 لا . فالصيغ الجديدة لا تتميز على الصيغ القديمة بما صدق أكثر أصالة ،
 ولا نستطيع هنا أن نقدم برهاناً صورياً على هذا . ولكننا نكتفي بذكر
 عدد من الأمثلة التي توضح العلاقة بين الصيغ الجديدة والصيغ القديمة . نخذ
 مثلاً الصيغ التالية :

(١) (هـ) ، (ي) (ف هـ ج ي)

(٢) (هـ) (ف هـ) ، (هـ) (ج هـ)

(٣) (هـ) (ف هـ ج هـ)

وبقليل من التفكير يقتنع القارئ أنه برغم عدم اجتماع (١) ، (٣)
 على نفس المعنى فإن (١) ، (٢) يملكان نفس المعنى . وبالمثل :

(٤) (هـ) (هـ) (هـ) (ف) (هـ) (جى)

تعنى نفس الشيء مثل :

(٥) (هـ) (هـ) (ف) (هـ) (جى) (هـ)

وذلك لأن فى رقم (٤) قد تشير المتغيرات المقيدة (هـ) ، (هـ) أو قد لا تشير إلى نفس الأشياء الفردية ^(١) . ويصدق نفس الشيء فيما يتعلق بالمرتبتين اللتين وقعت فيهما (هـ) داخل كمى المحمول أو « المكيفين الكمييين » ^(٢) بالعبارة رقم (٥) .

وبالتالى فمئذ كانت (س س س) تكافئ (س س س) كانت إذن كذلك :

(٦) (هـ) (هـ) (هـ) (ف) (هـ) (جى)

تكافئ

(٧) (هـ) (هـ) (هـ) (ف) (هـ) (جى)

التي تكافئ بدورها :

(٨) (هـ) (هـ) (ف) (هـ) (جى) .

(١) الفرد ما يتناول شيئاً واحداً دون غير (الخرجاني) . (المترجم) .

(٢) المكيف الكمي أو كم المحمول Quantifier هو اسم العلامة (هـ) التي تسبق الصيغة

المنطقية (أ) التي تكون هى نفسها محتوية على (هـ) كمتغيرة للإشارة إلى أن (أ) تتضمن كل قيم (هـ) عادة بالنسبة إلى كل قيمها فى مجال معين من القيم الموجودة ضمناً فى السياق أو المشار إليها ببعض العلامات . ويعطى هذا الاسم أيضاً كم المحمول أو المكيف للكمى للعلامات والرموز للمتغيرة أو المتناوبة المستخلصة لنفس هذا الغرض عندما يكون المكيف الكمي أو كم المحمول كلياً . أما إذا كان وجودياً فيوضع مسبقاً بعلامة (هـ) .

مثل (هـ) متقلداً على الصيغة المنطقية (أ) وتكون فى العادة معادلة لقيمة المكيف كم المحمول أو المكيف الكمي الكلي (هـ) .

وعلى ذلك فهذه الصيغ بما فيها من المتغيرين ذوى كم المحمول قد تنشق إلى تأليفات دوال الصديق للصيغ بمتغير واحد فقط ذى كم محمول وتوحى هذه الوقائع (ولكنها لا تثبت بطبيعة الحال) بما يكون عليه الأمر بالفعل وهو أن تلك الصيغ ذات التكميمات^(١) العديدة يمكن دائماً أن تتحول إلى صيغ مكافئة لها عبارة عن دوال صديق خاصة بالصيغ ذات التكميمات المفردة .

وبناء على هذه الواقعة يكون تقديم مثل هذه الصيغ ذا أهمية نظرية ضئيلة ولن نتناولها بتفصيل أكبر من ذلك ها هنا . ولا شك في أن الماصدق يكون ذا أهمية عملية بقدر ما يعين على إقامة براهين صورية ذات قدر أكبر من التعقيد . غير أن المنهج الذى يقرر المسألة المنطقية لمثل هذه البراهين لا يختلف إطلاقاً عن المنهج الذى تناولناه من قبل في الفصل الخامس^(٢) .

٣ - المحمولات ذات الحدين :

هناك ما صدق ذو أهمية نظرية كبيرة وهو إدخال المحمولات ذات الحدين في نسقنا . وبعض القضايا المفردة تحتوى على أسمى علم أو أكثر . مثال ذلك :

(١) حسن أطول من محمود

(١) معناها تحديد الكم منطقياً بالرمز (المترجم) .

(٢) من الأفضل فيما يتعلق بما قلناه في الفقرة الثالثة من الفصل الخامس ، أن نؤكد أن ما نقوله هنا يرتبط فقط بالتعبيرات التى تحتوى على محمولات الحد الواحد (أو محمولات الموقع الواحد) مثل (أزرق) أو (ساخن) . ولا يمكن تطبيقه في حالة التعبيرات التى تحتوى على محمولات أكثر تعقيداً مثل تلك التى ورد ذكرها في الفقرة الثالثة والمشار إليها .

(٢) تقع الإسماعيلية بين السويس وبور سعيد

فهذه القضايا تقرر وجود علاقة بين شيئين فرديين أو أكثر . ويمكن التعبير عنها رمزياً كالآتي :

(٣) ف ا ب

(٤) ف ا ب ج

ففي رقم (٣) يمكن تفسير الحرف (ف) على أنه يعنى العلاقة (أطول من) . وفي رقم (٤) يمكن تفسير الحرف (ف) على أنه يعنى (الوقوع فيما بين) . ويقال عن (أطول من) أنها العلاقة ذات الحدين أو العلاقة الثنائية وعن (الوقوع فيما بين) أنها علاقة ذات ثلاثة حدود أو علاقة ثلاثية . ومن الممكن التفكير في علاقات رباعية أو خماسية ذات أنظمة أرفع وإن كان ذكر هذه العلاقات لا يرد عادة كثيراً في الكلام العادى .

وباستخدام المتغيرات وكم المحمول (أو المكيفات الكمية) نحصل على صيغ مثل :

(٥) (هـ) (هـ) (هـ) (هـ) (هـ) (هـ) (هـ) (هـ) (هـ)

(٦) (هـ) (هـ) (هـ) (هـ) (هـ) (هـ) (هـ) (هـ) (هـ)

فإذا فسرنا (ف) بوصفها تعنى (أطول من) كان رقم (٥) يعبر عن القضية الصادقة .

(٧) توجد (هـ) وتوجد (هـ) بحيث تكون (هـ) أطول من (هـ) .

وتعبر العبارة رقم (٦) وفقاً لنفس هذا التفسير عن القضية الكاذبة

التالية :

(٨) توجد (هـ) بحيث . . . وتكون (هـ) فى كل القيم أكثر طولاً من (ى) .

وهذه كاذبة لأنه لا يمكن أن يكون شيء ، أطول من نفسه . ويعد إدخال العلاقات الثنائية وما عداها فى المنطق علامة تقدم ذات أهمية كبيرة . وقد يبدو لأول وهلة أنها مجرد محمولات عادية مثل (أزرق) و (ساخن) أو أى محمول آخر من النمط الذى تناولناه فى الفصل السابق . والخلاف الوحيد بينها هو أن ذلك (الأزرق) هو محمول الموضع الواحد الذى يصف شيئاً واحداً فقط فى كل مرة فى حين تعد (فيما بين) مثلاً محمول المواضع الثلاثة الذى يتطلب أفراداً ثلاثة يصفها فى كل مرة يقع فيها . وهذا صحيح . غير أن النقطة الهامة هى أن العبور من محمولات الموضعين أو أكثر من الموضعين يؤدى إلى ظهور تعقيدات ذات شأن فى المنطق .

وقد رأينا أن المشكلة الأساسية فى منطق المحمولات هى مشكلة الاستيفاء لبعض الفئات المعطاة الخاصة بالصيغ ذات كم المحمول أو ذات المكيف الكمى . وإلى الآن عالجنا هذه المسألة — مسألة الاستيفاء — بطريقة حدسية . أعنى أننا اكتفينا بواقعة أن الصيغة تكون مستوفاة إذا أمكننا أن نعزو المعانى إلى حدود المحمول المتوفرة فيها حتى نحصل من وراء تفسيرنا على قضية صحيحة . وقد أقمنا تكتيكاً قابلاً للتطبيق إلى صنف محدود من الصيغ هو عبارة عن تلك الصيغ التى سبق تناولها فى الفصل الخامس والتى ستعيننا على القول ما إذا كانت الصيغة الخاصة مستوفاة وما إذا كان العدد المحدود الخاص من الصيغ مستوفى فى آن معاً .

ولا نستطيع أن نقوم بمد وترصيل هذه المعالجة الحدسية إلى الصيغ التى تنطوى على محمولات ذات حدين . وسوف نعرف أسباب ذلك فيما بعد .

والمهم هو أن نقوم بتحليل دقيق لفكرة الاستيفاء وأن نقدم تعريفاً دقيقاً صارماً لما نريد أن نشير إليه بقولنا إن هذه الصيغة مستوفاة . وهذه المعالجة التحليلية لن تفسد أى شيء مما قلناه بهذا الصدد ولكنها سوف تصدر في صورة فهم عميق لفكرة الاستيفاء التي تقوم بمثابة الأساس في المنطق .

٤ — الاستيفاء : المستويات المحدودة^(١) :

لنفرض أن لدينا مجموعة صغيرة مكونة من ثلاثة أشياء مختلفة مثلاً . ولنفرض أننا نحصر اهتمامنا في هذه المجموعة الصغيرة ، وأننا نفسر صيغنا دائماً في حدود هذه الأشياء : خصائصها وعلاقاتها . ونسمى هذه الأشياء $(أ)$ ، $(ب)$ ، $(ج)$. وتسمى هذه المجموعة من الأشياء المستخدمة بقصد تفسير الصيغ ، المستوى أو عالم المقال^(٢) .

ولننظر الآن في محمول من عالم مقال عادى مثل (أحمر) . سيعتمد هذا

(١) أشار كتاب أصول الرياضيات في الترجمة العربية إلى Domains باسم الميادين تمييزاً لها من المجالات Fields . وقد فضلنا هنا المستويات ترجمة للفظـة Domains وهي أسلم . فالعدد الترتيبي (ن) هو الصنف أو الفئة الخاصة بالعلاقات المتسلسلة التي تشمل مستوياتها أو التي تبلغ مستوياتها (ن) من الحدود ، حيث (ن) عدد أصلي متناه . ويمكن أن نتصور مستوى خالياً تماماً من أى شيء كان . مثل مستوى الأصفار وهو مستوى الفئات أو الأصناف الفارغة أو ما يسميه باللامعروف . (المترجم) .

(٢) عالم المقال Univers of discourse هو المستوى الذي تنسب إليه الصفة أو الأفراد الذين يدخلون تحت نوع من هذه الصفة . فالنقى لا يدل على نقي كل شيء في الوجود عدا اللون الأبيض مثلاً في عبارة لا — أبيض ، وإنما يدل فقط على نقي الأسود والأحمر والأزرق والأصفر أى كل الأفراد الداخلة تحت نوع اللون . فالنقى لا بد أن يشير فقط إلى عالم المقال المعين الذي تنسب إليه الصفة المنفية والذي يستنفده المثبت والنقى بينهما . انظر كتاب المنطق الصورى لعبد الرحمن بدوى — ص ٦٣ (المترجم) .

المحمول إلى قسمة هذه الأشياء الثلاثة إلى صنفين أو فئتين حسب انتهاء كل منها إلى اللون الأحمر أو عدم انتهاء. وبهذا المعنى يقوم اللون الأحمر بتعريف صنف في المستوى الخاص بهذه الأشياء (أ^٨ ب^٨ ج^٨) أى صنف الأشياء الحمراء في هذا المستوى .

والآن نتأمل الأصناف المختلفة الممكنة في مستوى (أ^٨ ب^٨ ج^٨) . . توجد ثمانية أصناف ممكنة بالضبط وهي :

١ - صنف اللاشئ (وهو الصنف الذى لا يوجد فيه أى شئ إطلاقاً أو الفئة التى ليس فيها أفراد على الإطلاق) .

٢ - الأصناف الثلاثة التى يتألف أفرادها فقط من أ^٨ ، ب^٨ ، ج^٨ على التوالى .

٣ - الأصناف الثلاثة التى يتألف أفرادها فقط من (أ^٨ ، ب^٨) ، (أ^٨ ، ج^٨) ، (ب^٨ ، ج^٨) على التوالى .

٤ - الصنف الذى يحتوى على (أ^٨ ، ب^٨ ، ج^٨) وهو الصنف الذى يمتد في وقت واحد إلى كل المستوى .

ومن الممكن تسجيل هذه الأصناف على النحو التالى :

(١) صفر

(٢) [أ^٨]

(٣) [ب^٨]

[७] (६)

$$[\overset{\wedge}{\cup} \overset{\wedge}{\cap}] (5)$$

[७] (१)

[ڄ ٻ] (۷)

(11) $[\overset{\wedge}{\text{ح}} \overset{\wedge}{\text{ب}} \overset{\wedge}{\text{أ}}] (\wedge)$

ومن الواضح الآن أنه مهما كانت المحمولات التي نستعملها لتعريف صنف في هذا المستوى فمن الضروري أن نعمل دائماً على تعريف واحد من بين هذه الأصناف الثمانية . وبالإضافة إلى ذلك سوف يعمل عدد كبير من المحمولات المختلفة على تعريف نفس الصنف كما أن كل هذه المحمولات المختلفة ستحمل برغم ذلك معاني مختلفة في اللغة العادية . فمثلاً (أ) قد يكون الشيء المستدير الوحيد . وعلى ذلك فأحمر ومستدير تعرفان نفس الصنف في هذا المستوى . وبرغم ذلك فأحمر ومستدير تعنيان معنيين مختلفين تماماً

ولنفرض أن لدينا بعض الصيغ التي تنطوي على محمولات ذات حد واحد مثل :

(A f) (A e)

وحاولنا تفسيرها في مسرى (أ ب ج) . فمثلاً في إمكاننا أن نهب أى عدد من المعانى المختلفة إلى (ف) . ولكن هذه المعانى كلها سوف تعرف واحداً من بين هذه الأصناف الثمانية المذكورة . وبالتالي فبقدر ما يتعلق الاهتمام

(١) ملحوظة : يلاحظ هنا استخدام هذه الأقواس التي تشير إلى معنى الصنف .

في هذا المستوى بموضوع الاستيفاء سيكون من الممكن إعطاء (ف) ثمانية تفسيرات فعلية فقط .

وواضح الآن أن مسألة الاستيفاء لأي صيغة (تحتوي فقط على محمولات ذات حد واحد) في مستوى $\overset{\wedge}{\text{أ}} \overset{\wedge}{\text{ب}} \overset{\wedge}{\text{ج}}$ ميسورة التحديد . فليس ثمة حاجة إلى البحث عما يتلاءم مع حدود المحمول المختلفة بالفعل وأعني بها الثمانية التحويلات المختلفة الممكنة الخاصة بمحمول معين معطى إلى أصناف $\overset{\wedge}{\text{أ}} \overset{\wedge}{\text{ب}} \overset{\wedge}{\text{ج}}$.
فتسلا :

(هـ) (ف هـ . ب ج هـ)

تعد قضية مستوفاة في هذا المستوى لأنه إذا ارتبطت (ف) ارتباطاً اقترانياً بالصنف [أ] وارتبطت (ل) كذلك بالصنف [ب^١] فسيكون ثمة شيء وهو (أ) الذي يتصف بالخاصية (ف) وليس بالخاصية (ل) .

هـ - المستويات المحدودة (يتبع) (٢) :

ضربنا مثلاً من مستوى يحتوي على ثلاثة أشياء وشرحنا المقصود من قولنا إن الصيغة تكون مستوفاة في مثل هذا المستوى . ولكن من الواضح أنه كان في إمكاننا أن نتأمل المستوى الذي يضم شيئاً واحداً أو شيئين اثنين أو ستة وعشرين

(١) نقول إن (ف) مرتبطة اقترانياً بالصنف (أ^١) وهو الصنف الذي يكون أفرادُه عضواً وحيداً هو (أ^١) إذا تم تحويل المعنى (أحمر مثلاً) إلى (ف) بحيث تكون (أ^١) هي الشيء الوحيد المتصف بهذه الخاصية في هذا المستوى .

(٢) لا يقال مستويات نهائية في مقابل المستويات اللانهائية في الرياضيات : ولذلك فضلنا هنا وضع المستويات المحدودة في مقابل المستويات اللانهائية لأنها أكثر دلالة وأدق في المعنى ولا تؤدي إلى اللبس الذي يمكن أن ينجم عن قولنا مستويات (نهائية) . وذلك فضلاً عن أن المستوى المحدود مستخدم بالفعل عند رجال الرياضة العرب . (المترجم)

شيئاً أو أى عدد آخر محدود من الأشياء . (سوف نرى فيما بعد أن المستويات اللانهائية نفسها أيضاً تلعب دورها) ونستطيع برغم ذلك كله أن نتصور مستوى خالياً تماماً من أى شيء كان .

وهنا يرد سؤالان :

(أ) هل توجد صيغ مستوفاة فى بعض المستويات وغير مستوفاة فى مستويات أخرى ؟

(ب) هل توجد صيغ غير مستوفاة فى أى مستوى من المستويات ؟
ومن أجل الإجابة عن هذين السؤالين علينا أولاً أن نوضح ما نعنيه بعبارة « مستويات مختلفة » . ولنحاول هذه المحاولة قبل كل شيء .

تعريف أول : سوف نقصد بقولنا « مستويات مختلفة » تلك المستويات التى تضم أعداداً مختلفة من الأشياء . وبعبارة أخرى تكون المستويات التى تضم نفس العدد من الأشياء فى حالة هوية بينها وبين بعضها أى أنها تكون كلها هى هى من أجل الأغراض المنطقية سواء كانت الأشياء الموجودة فى تلك المستويات مختلفة أم غير مختلفة .

وهذا التعريف يسمى بمبدأ التوسع « أو التشعب » وهو الذى يبرز المقصود بقولنا إن المنطق يعنى بالصورة لا بالمضمون أو بالمادة (انظر الفصل الأول) :
ويمكن الإجابة عن السؤال (أ) بسهولة كافية . فالصيغة :

(e) (ف ه ا)

لا تقبل الاستيفاء فى مستوى مجالى فارغ . وفى الحقيقة لا تقبل أى قضية وجودية أن تكون مستوفاة فى مستوى فارغ لأسباب واضحة . وكذلك :
(e) (ا) (ي) (ف ه . ~ ف ي)

لا تقبل الاستيفاء فى مستوى يضم أقل من شيئين مميزين . وعموماً لدينا :

١ - في حالة العدد المحدود (ب) توجد صيغ لا تقبل الاستيفاء في أى مستوى يضم أقل من (ب) الأشياء .

٢ - إذا كانت إحدى الصيغ تقبل الاستيفاء في مستوى يضم (ب) من الأشياء فسوف تكون إذن قابلة للاستيفاء في أى مستوى يضم أكثر من (ب) من الأشياء .

وتوحى هذه الوقائع بالتعريف التالى عن « الاستيفاء عامة » .

تعريف ثان : تقبل الصيغة للاستيفاء (عامة) في حالة واحدة فقط عندما يكون ثمة مستوى محدود تكون هذه الصيغة مستوفاة فيه

وبالمثل :

تعريف ثالث : تكون صيغتان أو أكثر قابلتين للاستيفاء في آن معاً (أو متآلفتين) في حالة واحدة فقط عندما يتوافر مستوى تكونان فيه قابلتين للاستيفاء في آن معاً .

وقد يلاحظ القارئ أن هذه التعريفات كما هي عليه ليست تامة الحبكة والدقة . وذلك لأنه برغم أننا قد خصصنا عبارة (لا تقبل الاستيفاء في مستوى خال أو فارغ) بمعنى معين ، أغفلنا تحديد ما نعنيه بقولنا إن الصيغة تقبل الاستيفاء في مستوى خال أو فارغ . وفي إمكاننا إن نعطي هذه العبارة معنى ولكننا في الحقيقة سوف نتحاشى هذا التراجع كلية بإدخال تعديل على التعريفين الثانى والثالث كالآتى :

تعريف ثان مكرر : تقبل الصيغة الاستيفاء (عامة) في حالة واحدة فقط عندما يتوافر مستوى محدد غير خال تكون فيه قابلة للاستيفاء .

تعريف ثالث مكرر : تكون صيغتان أو أكثر قابلتين للاستيفاء (أو للتآلف) في آن معاً في حالة واحدة فقط عندما يتوافر مستوى محدد غير خال تكونان فيه قابلتين للاستيفاء في آن معاً .

٦ - المحمولات ذات الحدين - المستويات اللانهائية^(١) :

تؤدي التعريفات الخاصة بالاستيفاء والتآلف عملها جيداً حيال الصيغ التي تحتوى على المحمولات ذات الحد الواحد فقط أى بالنسبة إلى كل الصيغ التي سبق عرضها في الفصل الخامس . ومنهج القرار القاطع مؤسس في الحقيقة هنالك على استخدام حدسيّ للأفكار التي عدنا هنا فأعطيناها تعبيراً دقيقاً محكماً فقط . والسؤال الآن هو : هل هذه التعريفات مكافئة أيضاً للصيغ التي تحتوى على محمولات ذات حدين مثل « (هـ) (ف هـ ي) » وما شابه ذلك ؟ والإجابة عن هذا السؤال هي أنها ليست مكافئة لها . وتعد واقعة أنها ليست مكافئة لها ، من أهم وقائع المنطق .

أولاً : تأمل هذه الصيغة :

(١) (هـ) (ي) (ف هـ ي ب هـ ف ي هـ)

وهي بالأسلوب الحدسيّ قابلة للاستيفاء . وافترض أن (ف) تعني « أكبر من » . فعلى ذلك سيكون معنى العبارة رقم (١) ما يلي :

(٢) أياً تكن (هـ) ، (ي) . . . لو كانت (هـ) أكبر من (ي) كانت (ي) ليست أكبر من (هـ) .

ومن الواضح أن العبارة رقم (١) تقبل الاستيفاء في مستوى محدود مثل المستوى الذي يضم الأعداد ١ ، ٢ . (بطبيعة الحال هناك معان عديدة أخرى إلى جانب « أكبر من » لاستيفاء العبارة رقم (١) . مثال ذلك « والد » ، « إلى الشمال » ، « متأخر عن ») .

(١) المستويات اللانهائية هي التعبير الرياضى المؤلف باللغة العربية عند عامة المشتغلين بالرياضيات كقابل للمستويات المحدودة التي سبق ذكرها . وهذا أسوة بقول المتوالية اللانهائية .
(المترجم)

والآن تأمل :

(٣) (هـ) (ى) (ز) (ف هـ ي) (ف ي ز هـ) (ف هـ ز)

ويتم استيفاء العبارة رقم (٣) بكل من « معادل » ، « أكبر من » ولكن ليس بالتعبير « أكبر بواحد من » .

(٤) (ى) (هـ) (هـ) (ف هـ ي) (ف هـ ي)

ويتم استيفاء رقم (٤) بالتعبير « معادل »

ودعنا الآن نتساءل ماذا كانت (١) ، (٣) ، (٤) عبارات متألفة أو قابلة للاستيفاء فى آن معاً . ومن الواضح أن الصحة المنطقية للعدد الكبير من صور الاستدلال تعتمد على إجابة هذا السؤال .

ولنفرض أن م هو المستوى الخاص بعدد (ن) من الأشياء :

أ_١ ، أ_٢ ، أن ولنفرض أن (ع^٨) هى العلاقة التى تستوفى رقم

(١) أو بعبارة أخرى إذا كانت أو تمتلك العلاقة (ع^٨) بالنسبة إلى

ان فليس من شأن ان أن تمتلك العلاقة (ع^٨) بالنسبة إلى او . ويمكننا

تسجيل هذا كالاتى :

إذا كان (أو ع^٨ أن) كان لا - (ان ع^٨ او)

ولنفرض ان (ع^٨) تستوفى كذلك العبارة رقم (٣) أى

إذا كان (او ع^٨ أن)

وكان (أن ع^٨ أن)

كان (أ و ع^٨ أ ق)

وعلى ذلك فليس ثمة ما من شأنه أن يكون (أ ق ع^٨ أ و) . ونختار أى شيء ضمن مستوى (أ_١) فإذا كان من الضروري استيفاء العبارة رقم (٤) فلا بد أن يكون هنا لك شيء ما مثل (أ_٢) بحيث يكون (أ_١ ع^٨ أ_٢) وبالمثل (أ_٢ ع^٨ أ_٣) وهكذا . وبهذا يمكننا إنشاء سلسلة :

(أ_١ ع^٨ أ_٢) . (أ_٢ ع^٨ أ_٣) . (أ_٣ ع^٨ أ_٤)

(أ_ح-١ ع^٨ أ_ح) ومن الضروري أن تنتهى أى سلسلة من هذا القبيل مادام لا يمكن أن تشمل على أكثر من عدد (ن) من الأشياء فى المستوى . ولكن فى حالة العبارة رقم (٣) إذا كانت (أ_ق) تسبق (أ_ح) فى السلسلة فليس هناك ما يستدعى أن تكون (أ_ح ع^٨ أ_ق) . وعلى ذلك لا بد أن يكون ثمة شيء ما فى المستوى يناقض العبارة رقم (٤) .

وبرغم ذلك فالصبيغ الثلاث تقبل الاستيفاء بوضوح بالمعنى الحدسى . إذ لو كان المستوى هو مستوى الأعداد الموجبة كانت (ف) تعنى «أكبر من» لكانت العبارتان (١) ، (٣) مستوفاتين ولكانت العبارة (٤) أيضاً مستوفاة مادام فى كل حالة وجود الرقم (ح) يكون ثمة رقم (و) بحيث يكون هذا الأخير أكبر من (ح) . وذلك لأن ما يترتب على الأعداد الموجبة لا يصل إلى نهاية بحيث يقال عنه إنه مستوفى لا نهائى .

وقد شهدنا فى الفقرة رقم (٤) أن بعض المستويات المحدودة قد تكون أكثر اتساعاً من سواها (أى تضم عدداً أكثر من الأشياء) وأن هذا الاختلاف بين المستويات ذو أهمية بالغة فى المنطق . ومن المتفق عليه أن نقول عن

مستويين من المستويات إنهما في هوية معاً منطقياً أو تجريدياً إذا كانا يضمنان نفس العدد من الأشياء . ويترتب على ذلك سؤال : هل بعض المستويات اللانهائية أكثر اتساعاً بمعنى من المعاني من غيرها أم أن كل المستويات اللانهائية تعد تجريدياً في هوية ؟ أو بعبارة أخرى هل يتوافر للأغراض المنطقية مستوى واحد أو عدد كبير مميز تجريدياً من المستويات اللانهائية ؟ ولا يدخل في إطار هذا الكتاب أن نجيب إجابة كاملة عن هذا السؤال . ولكن سوف نذهب من أجل الغرض الحالى ومن أجل التبسيط إلى أنه يوجد فقط مستوى لانهائى واحد . وليس ذلك هو الشأن فى الواقع ولكن سيكون أقل مدعاة للاضطراب إزاء الأغراض المحدودة فى هذا التناول الحاضر أن نتكلم فى شىء من البساطة عن « المستوى اللانهائى » . وليس يعيب القواعد التالية أن هذا الادعاء الذى نسير بهديه لمواجهة احتياجات الموقف الحاضر غير صحيح . وعلى ذلك يمكننا أن نعد بعض قواعد الاستيفاء على النحو التالى :

القاعدة الأولى : إذا كانت الصيغة تقبل الاستيفاء فى بعض المستويات المحدودة فهى كذلك تقبل الاستيفاء فى المستوى اللانهائى .

القاعدة الثانية : إذا كانت الصيغة ذات المحمولات المكونة من حد واحد فقط تقبل الاستيفاء فى بعض الأحوال فهى على ذلك تقبل الاستيفاء فى بعض المستويات المحدودة .

القاعدة الثالثة : توجد صيغ تحتوى على محمولات ذات حدين ولا تقبل الاستيفاء إلا فى المستوى اللانهائى .

٧ - الصديق المنطقى :

قسمنا الصيغ الخاصة بحساب القضايا فى الفصل الثانى إلى صنفين أوفتين

١ - تحصيل الحاصل .

٢ - صيغ أخرى من غير تحصيل الحاصل .

وتحصيل الحاصل هو الصيغة الصادقة منطقياً من حيث ضمانها لصورة معينة من صور الاستدلال . وينشأ عن هذا سؤال : هل نستطيع أن نخصص صنفاً (أو فئة) مماثلاً لصيغ حساب المحمولات ؟ يمكننا ذلك في حالة استخدامنا لفكرة الاستيفاء .

وقد شرحنا في الفقرتين السابقتين المقصود بقولنا إن الصيغة تكون قابلة للاستيفاء في المستوى (م) الذي يضم عدداً محدوداً (ن) من الأشياء . ويمكننا على ذلك أن نقسم صيغنا إلى فئتين (أو صنفين) :

١ - صيغ قابلة للاستيفاء في (م ن)

١١ - صيغ غير قابلة للاستيفاء في (م ن)

ولنحاول الآن النظر في الصنف التالي :

١١١ - صيغ تعد صور نفيها أعضاء في الصنف (١١) السابق .

وسيقان عن (١١١) إنها تنشئ صنفاً من الصيغ الصحيحة بداخل (م ن) ومن الواضح أن مثل هذه الصيغ سوف تعتبر دائماً عن قضايا صادقة مهما يكن التفسير الذي نعطيه لها (في حدود م ن)

وإذا كان مقدراً أن نعرف مقدماً عدد الأشياء التي يحتوي عليها هذا المستوى المذكور هنا كانت الصيغ الصحيحة فيه ضماناً لاختلاف أشكال الاستدلال كأنها عبارات تحصيل الحاصل . وإذا كان عدد الأشياء الداخلة في المستوى غير معروف لدينا كما هو الحال دائماً في مثل هذه الأحوال فمن الواضح أن ادعاء أن المستوى يشتمل على أي عدد معين من الأشياء قد يؤدي إلى استدلالات مغارطة . ولهذا السبب لا يمكن أن نكتفي بالصيغ الصحيحة في بعض المستويات دون غيرها . ونستلزم أن تكون صيغنا صحيحة في كل المستويات مع بعض الاستثناء المعين .

والاستثناء بهذا المعنى هو عدم ضرورة أن تكون صيغنا صحيحة في المستوى الخالي أو المستوى الذى لا يضم إليه أى عضو . والمسألة هنا مسألة تخفيف وتيسير فحسب . فثلاً لو كان مباحاً لنا بأن نستفيد من هذا الاستثناء لتناولنا مثل هذه الصيغة :

(e a (f a v - f a)

على أنها صحيحة .

ولكن سيكون من غير المناسب إطلاقاً أن نجد أنفسنا دائماً مضطرين في استدلالنا إلى تضمين مقدمة ظاهرة بقصد الإشارة إلى أنه يوجد شيء ما في عالم المقال . ومن الأوفق كثيراً اعتبار الأمر مسلماً به .

وقد يدهش القارئ الآن إذا عرف أننا نمتلك الآن تخصيصاً كاملاً للصدق المنطقى . فهل نستطيع أن نوسع من امتداد فئة الصيغ بطريقة ما وأن نقيم لهذه الفئة الممتدة من الصيغ معياراً معيناً من الصدق المنطقى يعد أقوى من فكرة الصحة والسلامة المنطقية التى سبق عرضها من قبل بحيث تكون الفكرة أقوى من فكرة تحصيل الحاصل ؟ والإجابة عن هذا السؤال مشحونة بالصعوبات الكثيرة ولا نستطيع أن نتناولها هنا بأى تفصيل قد نستطيع حقاً إيجاد امتداد لفئتنا من الصيغ بحيث نحصل على ما يسمى باسم (امتداد حساب المحمولات) . ويعد هذا الحساب أقوى بكثير من حساب المحمولات المحدود لكون هذا الأخير أقوى بدوره بكثير من حساب القضايا .

٨ - إجراءات الاستدلال القاطع :

يفهم من قولنا إجراء الاستدلال القاطع ذلك المنهج الذى يتقرر به ما إذا كانت إحدى الصيغ الزومية arbitrary المعطاة في إحدى الفئات

صحيحة منطقياً أم لا . وتوافرت لدينا مثل هذه الإجراءات بالنسبة إلى صيغ حساب القضايا فيما أسميناه بمنهج جداول الصدق أو منهج الصور الوصلية العادية . والملاحع التي تجعل من هذه المناهج إجراءات للاستدلال القاطع هي الآتية :

- ١ - يمكن تطبيقها على أى صيغة من صيغ حساب القضايا .
- ١١ - تصل دائماً إلى إجابة (فيما إذا كانت الصيغة تحصيل حاصل أم لا) بعد عدد محدد من عمليات الحساب .

ولدينا كذلك إجراء استدلال قاطع خاص بحساب المحمولات ذات الحد الواحد فى الفصل الخامس شرحنا منهجاً خاصاً بتقرير ما إذا كانت أى صيغة من نوع معين قابلة للاستيفاء أم لا . ورأينا أن الصيغة تكون صحيحة فى حالة واحدة فقط عندما تكون صيغتها المنفية غير قابلة للاستيفاء . وما هنا يبنى إجراء الاستدلال القاطع على ادعائين :

أولهما : أن أى صيغة (أ) من مجموع حساب المحموت ذات الحد الواحد يمكن أن ترتبط ببعض صيغ (ب) من الفئة المحدودة فى الفصل الخامس بحيث لا تكون (أ) صحيحة إلا فى حالة واحدة فقط عندما تكون (ب) صحيحة .

وثانيهما : أنه إذا كانت إحدى صيغ حساب المحمولات ذات الحد الواحد صحيحة فى كل مستوى محدود (غير فارغ) كانت صحيحة كذلك فى المستوى اللامحدود .

وهذان الادعاءان صحيحان ولكن قد يلزم أن يضع القارئ فى اعتباره أننا لم نقم بتحقيقهما . (فالبراهين على هذين الادعائين خارجة عن نطاق

هذا الكتاب) وبالتالي يظل برهاننا ناقصاً فيما يتعلق بوجود مثل هذا الإجراء .
 وإذا أضفنا إلى هذه الصيغ تلك الصيغ الأخرى التي تحتوى على محمولات
 ذات حدين أو ثلاثة أو عامة ذات عدد (ن) من الحدود حصلنا على
 ما أسميناه بحساب المحمول المحدود . فهل نملك إجراء استدلال قاطع خاص
 بهذا الحساب ؟ الواقع أننا لا نملك مثل هذا الاستدلال القاطع وقد لا نملك
 مثله إطلاقاً . وليس سبب ذلك سهل التوضيح بدون الدخول في تفاصيل
 تقنية عديدة . ولكنه يرتبط ارتباطاً وثيقاً بحقيقة أن الادعاء رقم (١١)
 المذكور عاليه لا يسرى على حساب المحمول المحدود ككل موحد . ولعل بعض
 الملاحظات القليلة قد تفيد القارئ هنا .

الواقع أن إجراء الاستدلال القاطع عملية آلية في جوهرها . ولو أمكننا
 أن نتقدم بمثل هذا الإجراء لكان في مقدورنا دائماً أن نبتكر من حيث
 النظرية على الأقل جهازاً يحملها محمل التنفيذ بدون أى تدخل من قبل الإنسان .
 وأعم تصور لمثل هذا الجهاز الحاسب المعروف لدينا هو ما تقدم به في
 سنة ١٩٣٦ الدكتور أ . م . تورينج Dr . A. M. Turing ولهذا السبب سميت
 كل الأجهزة التي تندرج تحت هذا التصوير باسم أجهزة تورينج . ومن
 المؤكد أنه إذا تم يوماً إيجاد أى إجراء للاستدلال القاطع في حساب المحمول
 المحدود فلن يكون الجهاز المبتكر من نفس نوع جهاز تورينج . والحقيقة
 أننا لا نملك أدنى تصور فيما يتعلق بما سوف تكون عليه أجهزة الحساب
 إذا لم تكن من نوع جهاز تورينج كما أننا لا نملك أدنى فكرة عن الطريقة
 التي يمكن أن يدار بها مثل هذا الجهاز الجديد .

٩ - أنساق البديهيات :

نعني بقولنا « نسق البديهيات » ذلك المنهج الذي نستخرج به صيغاً صادقة
 منطقياً . ويتألف مثل هذا النسق عادة مما يلي :

١ - عدداً محدوداً من البديهيات .

١١ - عدداً محدوداً من قواعد الاستدلال .

وقد أعطينا مثلاً واحداً لنسق البديهيات وأعني به ذلك النسق من أجل استخراج واستخلاص كل الصيغ الصادقة منطقياً في حساب القضايا . ومن الواضح أنه لا بد فكرياً من استيفاء الشرطين التاليين :

١ - كل صيغة صحيحة منطقياً (من الفئة المطلوبة) يجب أن تكون قضية اشتقاقية .

١١ - لا تكون أى قضية غير صحيحة منطقياً اشتقاقية .

وقد برهنا على أن نسقنا الخاص بالبديهيات في حساب القضايا قد استوفى هذين الشرطين .

وقد نسأل بطبيعة الحال هل يمكن توفير مثل هذا النسق الخاص بالبديهيات بصورته الكاملة المتألفة لحساب المحمول المحدود ؟ والرد على هذا هو أنه من الممكن تدبير وابتكار نسق للبديهيات من أجل هذا الغرض بدون صعوبة كبيرة . والواقع أن أنساق البديهيات لحساب المحمول المحدود معروضة بدون البراهين المطلوبة للاستكمال والتألف في الكتب الأولية . وإذا كنا لم نقم بذلك هنا فسبب ذلك الوحيد هو أن الاعتبارات التي تؤدي إلى بنائه وإلى براهين تألفه واستكمالها تتطلب بالفعل فهماً كاملاً لأفكار الصحة والاستيفاء الأساسية وإن لم تكن ذات صعوبة ما . وإذا تبين القارئ قدرته من فهم الصحة والاستيفاء فهماً جيداً أمكنه الاطلاع على مرجع أساسي في هذا الصدد . (راجع سلسلة المراجع في الملاحظات النهائية في كل فصل) .

وترتبط أنساق البديهيات ارتباطاً وثيقاً بإجراءات الاستدلال القاطع .

والواقع أن نسق البديهيّات الكامل المتألف هو نصف إجراء للاستدلال القاطع لأن الصيغة إذا كانت صحيحة منطقياً أمكنها أن تبلغنا بالأمر . ومن الواضح على أى حال أنه إذا لم تكن الصيغة صحيحة منطقياً (وبالتالى لم تكن ضمن قائمة الصيغ الاشتقاقية) فإن أى امتداد أو تشعب فى هذه القائمة لن يفيدنا شيئاً فى إبلاغنا بالأمر . ومن المدهش فيما يتعلق بالارتباط الوثيق بين نسق البديهيّات وإجراءات الاستدلال القاطع أن نسق البديهيّات يكون ممكناً عادة بالنسبة إلى حساب المحمول المحدود فى حين تكون إجراءات الاستدلال القاطع مستحيلة بالنسبة إلى هذا الحساب . وكل ما تستطيع هذه الإجراءات بلوغه هو توفير طريقة لنا من أجل إنشاء قائمة بكل الصيغ الصحيحة منطقياً ولكن بدون موافاتنا بطريقة تعين على إقامة جدول خاص بالصيغ غير الصحيحة . ولا يهم المنهج الذى نتبعه من أجل إعداد قائمة بالصيغ غير الصحيحة منطقياً من هذا الحساب سواء أسقطت البعض من تقديرها أو ضمت إلى القائمة بعض الصحيح منها .

مراجع الفصل السادس

من أفضل من تناول هذه الموضوعات الأولية الخاصة ببعض المشاكل والمسائل فى هذا الفصل ، كواين (٢٤) (١) . ويقدم لنا رايشنباخ (٢٥) عرضاً ممتازاً عن تقنيات حساب المحمول . والكتاب النصى المتداول فى هذا هو أيضاً كتاب هليبرت - أكرمان (١٢) . وراجع كلين (١٨) من أجل الإلمام بموضوع الأجهزة الآلية .

(١) أنظر أيضاً كتابه عن المنطق الأولى المنشور سنة ١٩٤١ فى بوسطن - نيويورك .

(الترجم)

إرشادات ومراجع عامة :

يعد كتاب كلين (١٨) من أدق البحوث وأكثرها إتقاناً في حقل المنطق الرمزي . وليس هذا الكتاب من الكتب السهلة وعلى الطالب ألا يرجع إليه حتى يمتلك زمام كتاب هيلبرت - أكرمان (١٢) . وكتب كل من فيتش (١١) وليويس - لانجفورد (٢٠) وكواين (٢٣) ورأيشنباخ (٢٥) واستروسن (٣٠) من الكتب العامه الجيدة عن المنطق الرمزي في مراحله المتقدمة وتتناول موضوع العلاقة بين المنطق واللغة العادية تناولاً ممتازاً . وكتاب روزنبوم (٢٦) من الكتب المختصرة ذات العرض النسيق المفيد للطالب إذا كان على معرفة وشغف خاص بالتقنيات الرياضية . وأفضل كتاب أولى هو كتاب أمبروزولا زيروفيتش (١) . ويمكن لقراء اللغة الفرنسية أن يرجعوا إلى كتاب دوب تحت عنوان : دروس في المنطق الصوري (٣ أجزاء) المنشور في لوفان سنة ١٩٥٠ ويعد ملئحلاً من الدرجة الأولى إلى هذا المنطق .

BIBLIOGRAPHY

- 1 — Ambrose, A. & Lazerowitz, M.
Fundamentals of Symbolic Logic - New York, 1948.
- 2 — Bennett, A. & Baylis, C. A. - Formal Logic — New-York,
1746
- 3 — Bochenski, I. M.
Ancient Formal Logic — Amesterdom 1950.
- 4 — Boehner, P.
Medieval Logic — Manchester. 1962.
- 5 — Boole, G.
Mathematical Analysis of Logic — Oxford 1948, reprinted.
- 6 — Carroll, G.
Symbolic Logic — London 1897.
- 7 — Cooley, J. C.
Primer of Formal Logic — New-York 1942.
- 8 — Couturat, L.
Algebra of Logic — London 1914.
- 9 — De Morgan, A.
Formal Logic, London 1956.
- 14— Eaton, R. M.
General Logic — New York 1951.
- 11— Fitcn, F.P.
Symbolic Logic.
- 12— Hilbert, D. & Ackermann. W.

- Principles of Mathematical Logic — New York 1950.
- 13— Jevons. W. S.
 Studies in Deductive Logic — London 1884.
 Principles of Science — London 1877.
- 14— Joseph. H. W. B.
 Introduction to Logic — Oxford 1916.
- 15— Jonnson, W.E.
 Logic 1 & 2 — Cambridge 1916.
- 16— Keynes, J. N.
 Formal Logic — London 1906.
- 17— Kleene, S. K.
 Introduction to Mathematics — New York 1952.
- 18— Langer, S. K.
 Introduction to Symbolic — London 1937.
- 19— Lewis, C. I. & Langford, C. H.
 Symbolic Logic — New York 1932.
- 20— Lukasiewicz, J.
 Aristotles Syllogistic — Oxf. 1961.
- 21— M ce, C. A.
 Principles of Logic — London 1933.
- 22— Quine, W. V. O.
 Methods of Logic — New York 1950.
 Mathematical Logic — Harvard 1951.
- 23— Reichenbach, H.
 Elements of Symbolic Logic — New York 1947.
- 24— Rosenbloom, P.
 Elements of Mathematical Logic — New York 1954.

25— Russell, B.

Introduction to Mathematical Philosophy — 1959.

26— Stebbing, L. S.

Modern Introduction to Logic — 1948

Modern Elementary Logic — 1952

27— Strawson, P. F.

Introduction to Logical Theory — 1952.

28— Tarski, A.

Introduction to Logic — New York 1941.

29— Venn, J.

Symbolic Logic — 1894.

30— Whitehead & Russell

Principia Mathematica — Cambridge 1 & 2 1925.

المحتويات

الصفحة

٥

مقدمة

٢١

تصدير

الفصل الأول:

تمهيد

٢٥

١ - المنطق الرمزي والمنطق التقليدي

٣١

٢ - استعمال الرموز

٣٦

٣ - الصورة المنطقية

٤٢

٤ - الاستدلال والالتزام .

الفصل الثاني :

حساب القضايا

٤٥

١ - القضايا وعلاقاتها

٤٩

٢ - دالات الصدق

٥١

٣ - جداول الصدق الأساسية في حساب القضايا

٥٩

٤ - العلاقات بين دوال الصدق

٦٣

٥ - ثوابت منطقية أخرى .

الفصل الثالث :

حساب القضايا (يتبع)

- ١ - منهج جدول الصديق لاختبار صحة البراهين ٧٣
- ٢ - التنقيط المنطقي ومجال الثوابت ٧٨
- ٣ - إنشاء جداول الصديق وتطبيقها ٨١
- ٤ - المنهج غير المباشر لتقرير جداول الصديق ٨٧
- ٥ - تصنيف القضايا ٩٠
- ٦ - الصيغ الأساسية للاستدلال ٩٢
- ٧ - إجراءات الاستدلال القاطع والأشكال العادية ٩٦
- ٨ - المجموع الكلي لتعابير الصديق القضوي ١٠١
- ٩ - الاشتقاق الاستبدالي ١٠٣

الفصل الرابع :

منهج البديهيات

- ١ - العرض من منهج البديهيات ١١١
- ٢ - بناء نسق البديهيات ١١٥
- ٣ - الصيغ المشتقة ١٢٤
- ٤ - ملاحظات أولية عن التمام ١٢٦
- ٥ - شروط نسق البديهيات ١٤٤

الفصل الخامس :

عناصر حساب المحمول

- ١ - بعض صور جديدة للاستدلال ١٦٥
- ٢ - قضايا مفردة ١٦٨
- ٣ - ملاحظات أشمل عن أسماء العلم والأوصاف ١٧١
- ٤ - العلاقات بين حساب القضايا وحساب المحمول ١٧٢
- ٥ - الكم الجزئي للمحمول : الوجود ١٧٥
- ٦ - تحليل بعض القضايا ذات كم المحمول ١٧٧
- ٧ - كم المحمول العملي ١٨٠
- ٨ - تفسير قضايا كم المحمول على أنها قضايا شرطية متصلة ومنفصلة ١٨٢
- ٩ - المتغيرات الحرة والمقيدة : الثوابت ١٨٥
- ١٠ - التفسير والصيغ المستوفاة ١٨٩
- ١١ - الصيغ المستوفاة معاً في وقت واحد ١٩٣
- ١٢ - القياس التقليدي ١٩٦

الفصل السادس :

بعض التطورات والأبعاد الهامة

- ١ - توسعات في صنف الصيغ ٢٠١
- ٢ - الصيغ التي تحتوى على أكثر من كم محمول أو مكيف كمى واحد ٢٠٤
- ٢ - المحمولات ذات الحدين ٢٠٦

الصفحة

- ٢٠٩ ٤ - الاستيفاء : المستويات المحدودة
- ٢١٢ ٥ - المستويات المحدودة (تابع)
- ٢١٥ ٦ - محمولات مزدوجة الحدود : المستويات غير المحدودة
- ٢١٨ ٧ - الصديق المنطقي
- ٢٢٠ ٨ - إجراءات الاستدلال القاطع
- ٢٢٢ ٩ - أنساق البديهييات
- ٢٢٧ ثبت المراجع

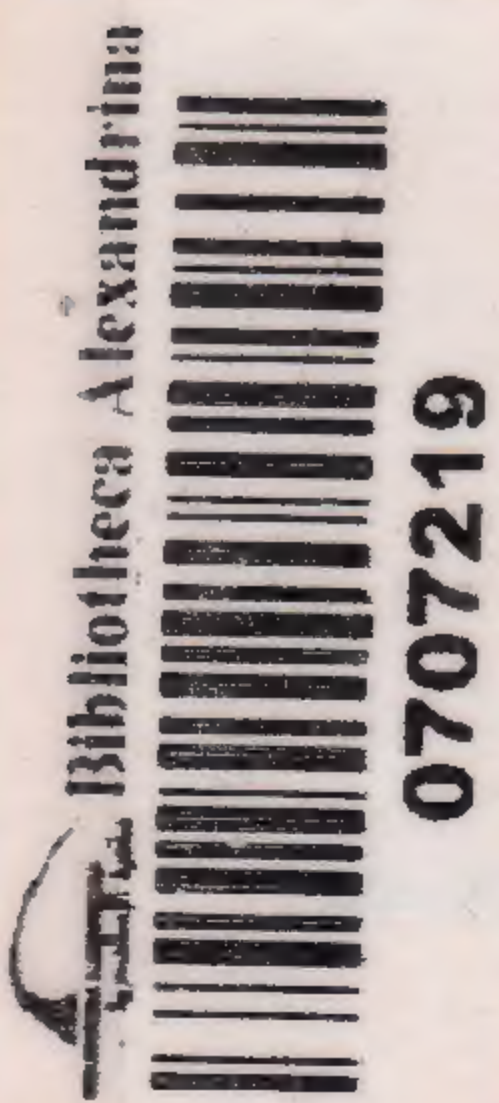
مطابع الهيئة المصرية العامة للكتاب

رقم الايداع بدار الكتب ١٩٨٧/٢٥١٤

ISBN ٩٧٧ - ٠١ - ١٢٩٧ - ٦

بدأت ملامح هذا المنطق تتضح عندما نشر كواين بحثه
المشهور عن الأسس الجديدة للمنطق الرياضى معلقا على
نظرية رسل وهوايتهيد فى كتابها المسمى باليرتكييا فى سنة
١٩٣٧ ، فأظهر كواين كيف اكتشف رسل أن نظرية الجبر
المجرد يمكن استقاؤها من منطق العلاقات ، وأن هذه النظرية
تؤدى إلى تعميمات رائعة ضخمة توفر للعلماء آلة منهجية قوية
لم يكن يتمتع بها منطق أرسطو ..

٢٠٠ قرش



مطابع الهيئة المصرية العا